УДК 517.521

О СУММИРОВАНИИ РЯДА ОБРАТНЫХ ОБОБЩЁННЫХ ПЕНТАТОПИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ НЕЧЁТНОГО ПОРЯДКА

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Рассмотрен ряд обобщённых пентатопических чисел произвольного нечётного порядка. Предложен прямой метод вычисления определённого интеграла, величина которого равна сумме этого ряда, основанный на разложении подынтегральной рациональной функции на простейшие рациональные дроби. Найдены коэффициенты этого разложения. Показано, что сумма ряда выражается в замкнутой форме через элементарные функции. Приведены подробные вычисления значения суммы ряда для нечётных порядков 3, 5, 7 и 9.

Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, ряд обобщённых пентатопических чисел *k*-го порядка, ряд обобщённых пентатопических чисел нечётного порядка, сумма ряда, рациональная функция, пентатопические числа.

1. Ряд обобщённых обратных пентатопических чисел нечётного порядка. В нашей работе [1] бесконечный положительный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(kn+1)(kn+2)(kn+3)(kn+4)}=\frac{1}{3!}\int_0^1\frac{(1-x)^2\,dx}{1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}},\quad k=1,2,3,\ldots \tag{1}$$

получил название ряда обратных обобщённых пентатопических чисел k-го порядка. Из формулы (1) следует, что в случае нечётного порядка $k=2m+1$, где $m=0,1,2,\ldots,$ ряд (1) сходится к сумме

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{((2m+1)n+1)((2m+1)n+2)((2m+1)n+3)((2m+1)n+4)}=$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1\frac{(1-x)^2\,dx}{1+x+x^2+\ldots+x^{2m-1}+x^{2m}}. \tag{2}$$

Интеграл в правой части, равный сумме ряда в левой части формулы (2), был вычислен нами для значений:

$k=1$ (см. [1])

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^2\,dx=\frac{1}{18}.$$

$k=3$ (см. [1])

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)(3n+4)}=\frac{1}{6}\int_0^1\frac{(1-x)^2\,dx}{1+x+x^2}=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\ln 3+\frac{\pi\sqrt{3}}{36}, \quad (3)$$

$k=5$ (через радикалы, см. [2])

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)}=\frac{1}{6}\int_0^1\frac{(1-x)^2\,dx}{1+x+x^2+x^3+x^4}=$$

$$\frac{\pi}{30\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}-3\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}\right). \quad (4)$$

$k=5$ (через значения тригонометрических функций, см. [2])

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)}=\frac{1}{6}\int_0^1\frac{(1-x)^2\,dx}{1+x+x^2+x^3+x^4}=$$

$$=\frac{\varphi}{6}\operatorname{ctg}\varphi+\frac{3\varphi}{6}\operatorname{ctg}3\varphi,\ \varphi=\frac{\pi}{5}, \quad (5)$$

Целью данной работы является вычисление интеграла (2) для произвольного натурального числа m и нахождение суммы ряда (1) для произвольного нечётного порядка $k>3$.

2. Вычисление суммы ряда обратных обобщённых пентатопических чисел нечётного порядка. Заметим, что если $k>3$, то подынтегральная функция в интеграле (2) является правильной рациональной дробью. Для вычисления интеграла (2) воспользуемся приёмами, изложенными в [3]. Найдём корни многочлена, стоящего в знаменателе в формуле (2). Для этого решим уравнение

$$x^{2m}+x^{2m-1}+\ldots+x^2+x+1=0, \quad m=2,3,4,\ldots, \quad (6)$$

Очевидно, что $x=1$ не является корнем этого уравнения. Умножая его на разность $x-1$, получим равносильное уравнение

$$(x-1)(x^{2m}+x^{2m-1}+...+x^2+x+1)=0, \quad x\neq 1,$$

или

$$x^{2m+1}-1=0, \quad x\neq 1. \tag{7}$$

Корни этого уравнения являются комплексными корнями степени $2m+1$ из единицы

$$x_n=\sqrt[2m+1]{1}_n=e^{i\frac{2\pi n}{2m+1}}, \quad n=1,2,3,...,2m. \tag{8}$$

Следовательно, справедливо разложение

$$x^{2m}+x^{2m-1}+...+x^2+x+1=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{2m-1})(x-x_{2m}). \tag{9}$$

Тогда подынтегральную функцию в интеграле (2) можно разложить на простейшие рациональные дроби

$$\frac{\frac{(1-x)^2}{6}}{1+x+x^2+...+x^{2m-1}+x^{2m}}=\frac{\frac{(x-1)^3}{6}}{x^{2m+1}-1}=\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{n=1}^{2m}\frac{A_n}{x-x_n}, \quad x\neq 1. \tag{10}$$

Умножив левую и правую часть этого равенства для каждого значения $s=1,2,3,...,2m$ на разность $x-x_s$ и, переходя к пределу при $x\to x_s$, получим

$$\lim_{x\to x_s}\frac{P(x)}{\frac{Q(x)-Q(x_s)}{x-x_s}}=\frac{P(x_s)}{Q'(x_s)}=\frac{\frac{(x_s-1)^3}{6}}{(2m+1)x_s^{2m}}=A_s+\lim_{x\to x_s}\left(x-x_s\right)\sum_{n=1,n\neq s}^{2m}\frac{A_n}{x-x_n}, \quad x\neq 1.$$

Так как $\lim_{x\to x_s}\left(x-x_s\right)\sum_{n=1,n\neq s}^{2m}\frac{A_n}{x-x_n}=0$, то из последнего равенства находим все коэффициенты разложения (10)

$$A_n = \frac{(x_n - 1)^3}{6(2m+1){x_n}^{2m}} = \frac{(x_n - 1)^3 x_n}{6(2m+1){x_n}^{2m+1}} = \frac{(x_n - 1)^3 x_n}{6(2m+1)}, \quad n = 1, 2, ..., 2m. \quad (11)$$

Перейдём от корней (8) к их комплексно сопряженным значениям

$$x_n^* = e^{-i\frac{2\pi n}{2m+1}} = e^{i2\pi} e^{-i\frac{2\pi n}{2m+1}} = e^{i\frac{2\pi(2m+1-n)}{2m+1}} = x_{2m+1-n}, \quad n = 1, 2, 3, ..., m. \quad (12)$$

Из формулы (12) следует, что эти корни образуют комплексно сопряжённые пары

$$x_1^* = x_{2m+1-1} = x_{2m}, \quad x_2^* = x_{2m+1-2} = x_{2m-1}, \dots, \quad x_m^* = x_{2m+1-m} = x_{m+1}, \quad (13)$$

и удовлетворяют соотношениям

$$x_n + x_n^* = e^{i\frac{2\pi n}{2m+1}} + e^{-i\frac{2\pi n}{2m+1}} = 2\cos\frac{2\pi n}{2m+1}, \quad (14)$$

$$x_n x_n^* = 1, \quad x_n = x_1^n, \quad n = 1, 2, 3, ..., 2m \quad (15)$$

Используя формулы (13), перепишем формулу (9), то есть разложение многочлена $x^{2m} + x^{2m-1} + ... + x^2 + x + 1$ на множители, следующим образом

$$x^{2m} + x^{2m-1} + ... + x + 1 = (x - x_1)(x - x_1^*)(x - x_2)(x - x_2^*)...(x - x_m)(x - x_m^*). \quad (16)$$

Заметим, что из формул (13) следует, что коэффициенты, задаваемые формулой (11), образуют комплексно сопряжённые пары

$$A_n^* = \frac{(x_n^* - 1)^3 x_n^*}{6(2m+1)} = \frac{(x_{2m+1-n} - 1)^3 x_{2m+1-n}}{6(2m+1)} = A_{2m+1-n}, \quad n = 1,2,...,m. \quad (17)$$

Теперь мы можем переписать разложение (10) следующим образом

$$\frac{\frac{(1-x)^2}{6}}{1 + x + ... + x^{2m-1} + x^{2m}} = \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{A_n}{x - x_n} + \frac{A_n^*}{x - x_n^*} \right)$$

или

$$\frac{\dfrac{(1-x)^2}{6}}{1+x+\ldots+x^{2m-1}+x^{2m}}=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{A_n(x-x_n^*)+A_n^*(x-x_n)}{(x-x_n)(x-x_n^*)}\right).$$

Так как согласно формулам (15) $x_1x_1^*=\ldots=x_mx_m^*=1$, то отсюда получаем

$$\frac{\dfrac{(1-x)^2}{6}}{1+x+\ldots+x^{2m-1}+x^{2m}}=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{(A_n+A_n^*)x-(A_nx_n^*+A_n^*x_n)}{x^2-(x_n+x_n^*)x+1}\right)$$

или

$$\frac{\dfrac{(1-x)^2}{6}}{1+x+\ldots+x^{2m-1}+x^{2m}}=\sum_{n=1}^{m}(A_n+A_n^*)\frac{x-\dfrac{(A_nx_n^*+A_n^*x_n)}{(A_n+A_k^*)}}{x^2-(x_n+x_n^*)x+1}.$$

Отсюда

$$\frac{\dfrac{(1-x)^2}{6}}{1+x+\ldots+x^{2m-1}+x^{2m}}=\sum_{n=1}^{m}(A_n+A_n^*)\frac{x-\dfrac{x_n+x_n^*}{2}+\dfrac{x_n+x_n^*}{2}-\dfrac{(A_nx_n^*+A_n^*x_n)}{(A_n+A_n^*)}}{x^2-(x_n+x_n^*)x+1}.$$

Из последнего равенства получаем

$$\frac{\dfrac{(1-x)^2}{6}}{1+x+\ldots+x^{2m-1}+x^{2m}}=\sum_{n=1}^{m}\frac{A_n+A_n^*}{2}\frac{2x-x_n-x_n^*}{x^2-(x_n+x_n^*)x+1}+\sum_{n=1}^{m}\frac{\dfrac{A_n-A_n^*}{2}(x_n-x_n^*)}{x^2-(x_n+x_n^*)x+1}$$

или

$$\frac{\dfrac{(1-x)^2}{6}}{1+x+\ldots+x^{2m-1}+x^{2m}}=\sum_{n=1}^{m}B_n\frac{2x-x_n-x_n^*}{x^2-(x_n+x_n^*)x+1}+\sum_{n=1}^{m}\frac{C_n}{x^2-(x_n+x_n^*)x+1},\quad(18)$$

где

$$B_n=\frac{A_n+A_n^*}{2},\quad n=1,2,\ldots,m,\qquad(19)$$

$$C_n=\frac{(A_n-A_n^*)(x_n-x_n^*)}{2},\quad n=1,2,\ldots,m.\qquad(20)$$

Подставляя разложение (18) в интеграл (2), получим

$$\int_0^1 \frac{\frac{(1-x)^2}{6}dx}{1+x+\ldots+x^{2m-1}+x^{2m}} = \sum_{n=1}^{m}\left(B_n \ln\left(2-(x_k+x_n^*)\right)+C_n\int_0^1 \frac{dx}{x^2-(x_n+x_n^*)x+1}\right). \quad (21)$$

Учитывая формулу (14) вычислим интеграл в правой части формулы (21), зная что $0<\frac{2\pi n}{2m+1}<\pi, \quad n=1,2,\ldots,m$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-(x_n+x_n^*)x+1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-2x\cos\frac{2\pi n}{2m+1}+\cos^2\frac{2\pi n}{2m+1}+\sin^2\frac{2\pi n}{2m+1}} =$$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{\left(x-\cos\frac{2\pi n}{2m+1}\right)^2+\sin^2\frac{2\pi n}{2m+1}} = \frac{1}{\sin\frac{2\pi n}{2m+1}}\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\frac{2\pi n}{2m+1}}{\sin\frac{2\pi n}{2m+1}}\Bigg|_{x=0}^{x=1} =$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{2\pi n}{2m+1}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos\frac{2\pi n}{2m+1}}{\sin\frac{2\pi n}{2m+1}}+\operatorname{arctg}\frac{\cos\frac{2\pi n}{2m+1}}{\sin\frac{2\pi n}{2m+1}}\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{\pi n}{2m+1}+\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\frac{2\pi n}{2m+1}}{\sin\frac{2\pi n}{2m+1}} = \frac{\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{\pi n}{2m+1}+\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi n}{2m+1}\right)}{\sin\frac{2\pi n}{2m+1}} =$$

$$=\frac{\frac{\pi n}{2m+1}+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi n}{2m+1}\right)}{\sin\frac{2\pi n}{2m+1}} = \frac{\pi-\frac{2\pi n}{2m+1}}{2\sin\frac{2\pi n}{2m+1}}. \quad (22)$$

Теперь перепишем интеграл (21), воспользовавшись формулами (14) и (22)

$$\int_0^1 \frac{\frac{(1-x)^2}{6}dx}{1+x+\ldots+x^{2m-1}+x^{2m}} = \sum_{n=1}^{m}\left(2B_n\ln\left(2\sin\frac{\pi n}{2m+1}\right)+\frac{\pi}{2m+1}C_n\frac{2(m-n)+1}{2\sin\frac{2\pi n}{2m+1}}\right) \quad (23)$$

и выразим величины B_n и C_n с помощью формул (8), (17), (19), (20)

$$B_n = \frac{(x_n-1)^3 x_n + (x_n^*-1)^3 x_n^*}{12(2m+1)} = \frac{(x_n^4+x_n^{*4}) - 3(x_n^3+x_n^{*3}) + 3(x_n^2+x_n^{*2}) - (x_n+x_n^*)}{12(2m+1)} =$$

$$= \frac{(x_n+x_n^*)^4 - 3(x_n+x_n^*)^3 - (x_n+x_n^*)^2 + 8(x_n+x_n^*) - 4}{12(2m+1)} =$$

$$= \frac{(2-x_n-x_n^*)^2((x_n+x_n^*)^2 + (x_n+x_n^*) - 1)}{12(2m+1)}, \qquad (24)$$

$$C_n = \frac{(x_n(x_n-1)^3 - x_n^*(x_n^*-1)^3)(x_n-x_n^*)}{12(2m+1)} =$$

$$= \frac{((x_n+x_n^*)^3 - 3(x_n+x_n^*)^2 + (x_n+x_n^*) + 2)(x_n-x_n^*)^2}{12(2m+1)} =$$

$$= \frac{((x_n+x_n^*)^2 - (x_n+x_n^*) - 1)(x_n+x_n^*-2)(x_n-x_n^*)^2}{12(2m+1)}, \qquad (25)$$

где $n = 1, 2, \dots, m$.

Отсюда

$$B_n = \frac{4\sin^2\frac{\pi n}{2m+1}\left(4\cos\frac{3\pi n}{2m+1}\cos\frac{\pi n}{2m+1}+1\right)}{3(2m+1)}, \quad n = 1, 2, \dots, m. \qquad (26)$$

$$C_n = \frac{4\left(1-4\sin\frac{3\pi n}{2m+1}\sin\frac{\pi n}{2m+1}\right)\sin^2\frac{\pi n}{2m+1}\sin^2\frac{2\pi n}{2m+1}}{3(2m+1)}, \quad n = 1, 2, \dots, m. \qquad (27)$$

Используя формулы (26) и (27) находим значение интеграла (23)

$$\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(1-x)^2\,dx}{1+x+\dots+x^{2m-1}+x^{2m}} =$$

$$=\frac{8}{3(2m+1)}\sum_{n=1}^{m}\sin^2\frac{\pi n}{2m+1}\left(4\cos\frac{3\pi n}{2m+1}\cos\frac{\pi n}{2m+1}+1\right)\ln\left(2\sin\frac{\pi n}{2m+1}\right)+$$

$$+\frac{2\pi\sum_{n=1}^{m}\left(1-4\sin\frac{3\pi n}{2m+1}\sin\frac{\pi n}{2m+1}\right)\sin\frac{2\pi n}{2m+1}\sin^2\frac{\pi n}{2m+1}(2m+1-2n)}{3(2m+1)^2}, \quad (28)$$

и сумму ряда (1) для $k=2m+1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{((2m+1)n+1)((2m+1)n+2)((2m+1)n+3)((2m+1)n+4)}=$$

$$=\frac{8}{3(2m+1)}\sum_{n=1}^{m}\sin^2\frac{\pi n}{2m+1}\left(4\cos\frac{3\pi n}{2m+1}\cos\frac{\pi n}{2m+1}+1\right)\ln\left(2\sin\frac{\pi n}{2m+1}\right)+$$

$$+\frac{2\pi\sum_{n=1}^{m}\left(1-4\sin\frac{3\pi n}{2m+1}\sin\frac{\pi n}{2m+1}\right)\sin\frac{2\pi n}{2m+1}\sin^2\frac{\pi n}{2m+1}(2m+1-2n)}{3(2m+1)^2}. \quad (29)$$

В качестве примера, вычислим суммы ряда (1) для значений $k=5, 7$ и 9. Поскольку $k=2m+1$, то в этом случае имеем, соответственно, $m=2, 3$ и 4. Тогда из (29) получаем

$m=2$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)}=$$

$$=\frac{8}{15}\sum_{n=1}^{2}\sin^2\frac{\pi n}{5}\left(4\cos\frac{3\pi n}{5}\cos\frac{\pi n}{5}+1\right)\ln\left(2\sin\frac{\pi n}{5}\right)+$$

$$+\frac{2\pi}{75}\sum_{n=1}^{2}\left(1-4\sin\frac{3\pi n}{5}\sin\frac{\pi n}{5}\right)\sin\frac{2\pi n}{5}\sin^2\frac{\pi n}{5}(5-2n)=$$

$$=\frac{8}{15}\sin^2\frac{\pi}{5}\left(4\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}+1\right)\ln\left(2\sin\frac{\pi}{5}\right)+$$

$$+\frac{8}{15}\sin^2\frac{2\pi}{5}\left(-4\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}+1\right)\ln\left(2\sin\frac{2\pi}{5}\right)+$$

$$+\frac{2\pi}{25}\left(1-4\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}\right)\sin\frac{2\pi}{5}\sin^2\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{75}\left(1-4\sin\frac{6\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\right)\sin\frac{4\pi}{5}\sin^2\frac{2\pi}{5}.$$

Так как [2]

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4},\ \sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},\ \sin\frac{2\pi}{5}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},$$

то

$$\frac{2}{5}\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\ln\left(2\cos\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right),$$

$$\frac{2\pi}{25}\sin^3\frac{2\pi}{5}-\frac{6\pi}{25}\sin^3\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{2}\pi}{40}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}-3\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}\right).$$

Отсюда получаем формулу (4)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)(5n+2)(5n+3)}=\frac{\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{2\sqrt{5}}+\frac{\pi\sqrt{2}}{40}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}-3\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}\right).$$

$m=3$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(7n+1)(7n+2)(7n+3)}=\frac{4}{7}\sum_{n=1}^{3}\cos\frac{4\pi n}{7}\sin^2\frac{\pi n}{7}\ln\left(2\sin\frac{\pi n}{7}\right)-$$

$$-\frac{2\pi}{7^2}\sum_{n=1}^{3}(7-2n)\sin\frac{4\pi n}{7}\sin^2\frac{\pi n}{7}, \qquad (30)$$

Так как

$$\cos\frac{12\pi}{7}\sin^2\frac{3\pi}{7}=\cos\frac{2\pi}{7}\frac{1-\cos\frac{6\pi}{7}}{2}=\cos\frac{2\pi}{7}\frac{1+\cos\frac{\pi}{7}}{2}=\cos\frac{2\pi}{7}\cos^2\frac{\pi}{14},$$

$$\cos\frac{4\pi}{7}\sin^2\frac{\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}=-\cos\frac{3\pi}{7}\frac{1-\cos\frac{2\pi}{7}}{2}-\cos\frac{\pi}{7}\frac{1-\cos\frac{4\pi}{7}}{2}=$$

$$=-\frac{\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}}{2}+\frac{\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}{2}+\frac{\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{2}=-\frac{\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}}{2}+$$

$$+\frac{\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}}{4}+\frac{\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}}{4}=-\frac{\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}}{4}+\frac{\cos\frac{5\pi}{7}}{2}=$$

$$=-\frac{\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}}{4}+\frac{\cos\frac{5\pi}{7}}{2}=-\frac{\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{2}-\frac{\cos\frac{2\pi}{7}}{2}=-\cos\frac{2\pi}{7}\cos^2\frac{\pi}{14}.$$

Отсюда следует, что равенство

$$\cos\frac{12\pi}{7}\sin^2\frac{3\pi}{7}=-\cos\frac{4\pi}{7}\sin^2\frac{\pi}{7}-\cos\frac{8\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7} \tag{31}$$

или $B_1+B_2+B_3=0$, которое позволяет уменьшить первую сумму в формуле (30) на одно слагаемое.

$m=4$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(9n+1)(9n+2)(9n+3)}=\frac{4}{9}\sum_{k=1}^{4}\cos\frac{4\pi k}{9}\sin^2\frac{\pi k}{9}\ln\left(2\sin\frac{\pi k}{9}\right)-$$

$$-\frac{2\pi}{9^2}\sum_{k=1}^{4}(9-2k)\sin\frac{4\pi k}{9}\sin^2\frac{\pi k}{9}. \tag{32}$$

В этом случае, как можно убедиться, справедливо равенство, аналогичное равенству (31)

$$B_1+B_2+B_3+B_4=0, \tag{33}$$

которое позволяет уменьшить первую сумму в формуле (31) на одно слагаемое, точно так же, как в предыдущем случае.

Заключение. Рассмотрен ряд обратных обобщённых пентатопических чисел нечётного порядка $2m+1$, $m=1,2,3,\dots$. Вычислена его сумма для любого m (см. формулу (29)). Этот ряд и его сумма отсутствует в известных математических справочниках [4-7].

Целью наших дальнейших исследований будет нахождение суммы ряда обратных обобщённых пентатопических чисел чётного порядка $2m$ для любого натурального m.

ЛИТЕРАТУРА

1. Терещенко И.В. О суммировании ряда обратных обобщенных пентатопических чисел k-го порядка. // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 13. - [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://ntk.kubstu.ru/file/737.

2. Терещенко И.В. О суммировании ряда обратных обобщённых пентатопических чисел 5-го порядка. // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2016. № 1. - [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://ntk.kubstu.ru/file/792.

3. Тимофеев А.Ф. Интегрирование функций. М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948.-433 с.

4. Смолянский М.Л. Таблицы неопределённых интегралов. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 108 с.

5. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Перевод с английского Н.В. Леви. – М. Наука, гл. ред. физ. -мат. лит., 1983.-176 с.

6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М. Наука, Uл. ред. физ. – мат. лит., 1981. – 800 с.

7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, рядов и произведений. 7-е изд. Перевод с английского В.В. Максимова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 1232 с.

REFERENCES

1. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada obratnykh obobshchennykh pentatopicheskikh chisel k-go poryadka. // Nauchnye trudy KubGTU: elektron.

setevoy politematich. zhurn. 2015. № 13. - [Elektronnyy resurs] – Rezhim dostupa: http://ntk.kubstu.ru/file/737.

2. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada obratnykh obobshchennykh pentatopicheskikh chisel 5-go poryadka. // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2016. № 1. - [Elektronnyy resurs] – Rezhim dostupa: http://ntk.kubstu.ru/file/792.

3. Timofeev A.F. Integrirovanie funktsiy. M.-L.: OGIZ GITTL, 1948.-433 c.

4. Smolyanskiy M.L. Tablitsy neopredelennykh integralov. – M.: GIFML, 1961. – 108 s.

5. Dvayt G.B. Tablitsy integralov i drugie matematicheskie formuly. Perevod s angliyskogo N.V. Levi. – M. Nauka, gl. red. fiz. -mat. lit., 1983.-176 s.

6. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integraly i ryady. – M. Nauka, Ul. red. fiz. – mat. lit., 1981. – 800 s.

7. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tablitsy integralov, ryadov i proizvedeniy. 7-e izd. Perevod s angliyskogo V.V. Maksimova. – SPb.: BKhV-Peterburg, 2011.-1232 s.

ON THE SUMMATION OF THE INFINITE SERIES OF THE GENERALIZED PENTATOPIC NUMBERS' RECIPROCALS OF THE ODD ORDER

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

The infinite series of the generalized pentatopic numbers' reciprocals of an odd order is considered. A direct method of calculating the definite integral, whose value is equal to the sum of this series, is proposed, which is based on the partial fraction expansion of the integrand rational function. The coefficients of this expansion are found. It is shown that the sum of the series is expressed in closed form in terms of elementary functions. Detailed calculation of the sum of the infinite series for the odd orders 3, 5, 7 and 9 are presented.

Key words: infinite series, infinite series of the generalized pentatopic numbers' reciprocals of the *k*-th order, infinite series of the generalized pentatopic numbers' reciprocals of the odd order, sum of an infinite series, rational function, pentatopic numbers.