УДК 517.521

О ПРИЗНАКЕ СХОДИМОСТИ ЕРМАКОВА

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2,
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Рассмотрен признак сходимости Ермакова – признак сходимости строго положительного ряда с монотонно убывающими членами. Поскольку в математической литературе излагается, как правило, только его наиболее важный частный случай, так называемый показательный признак Ермакова (непрерывная форма), дано доказательство признака Ермакова в общем виде, в том числе в предельной форме. Рассмотрен дискретный аналог признака Ермакова, найденный французским математиком Фабри. Указано на его неполноту, и предложено его доказательство, частично отличное от доказательства Фабри.
Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, положительный ряд, положительный ряд с монотонно убывающими членами, признак сходимости В.П. Ермакова, Е. Фабри.

1. Признак сходимости Ермакова (непрерывная форма). В теории рядов важную роль играют ряды с положительными и невозрастающими членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{1}$$

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \dots \ge a_n \ge \dots . \tag{2}$$

К таким рядам, например, относится обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 0 . \tag{3}$$

Часто встречается случай, когда члены ряда (1) являются значениями некоторой положительной функции $f(x) > 0$

$$a_n = f(n), \quad n = 1, 2, 3, \dots , \tag{4}$$

монотонно убывающей на неограниченном промежутке $[1, \infty)$

$$f(x_1) \ge f(x_2), \text{ если } 1 \le x_1 < x_2. \tag{5}$$

Например, для ряда (3) такой функцией является функция $f(x) = \dfrac{1}{x^s}$.

В 1871 году русский математик В.П. Ермаков [1, 2] предложил признак сходимости, который носит его имя. Приведём его современную формулировку.

Признак Ермакова. Пусть на промежутке $1 \le x < \infty$ задана непрерывная монотонно убывающая положительная функция $f(x) > 0$. Пусть к тому же на этом промежутке задана положительная, монотонно возрастающая и неограниченна сверху всюду непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x) > 0$, удовлетворяющая неравенству $\varphi(x) > x$. Тогда

1) если начиная с некоторого значения $x_0 \ge 1$ выполняется условие

$$\frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} \le q < 1, \quad x \ge x_0, \tag{6}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится.

2) если начиная с некоторого значения $x_0 \ge 1$ выполняется условие

$$\frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} \ge 1, \quad x \ge x_0, \tag{7}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится.

Беря различные функции $\varphi(x)$ можно получить семейство различных признаков сходимости. Ермаков считал, что наиболее простым и в тоже время очень чувствительным, признак Ермакова получается при выборе функции $\varphi(x) = e^x$. В этом случае признак Ермакова называется показательным признаком Ермакова.

Признак Ермакова можно сформулировать в предельной форме.

Признак Ермакова в предельной форме. *Пусть на промежутке* $1 \le x < \infty$ *задана непрерывная монотонно убывающая положительная функция* $f(x) > 0$. *Пусть к тому же на этом промежутке задана положительная, монотонно возрастающая и неограниченна сверху всюду непрерывно дифференцируемая функция* $\varphi(x) > 0$, *удовлетворяющая неравенству* $\varphi(x) > x$. *Тогда, если*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} = q\,, \tag{8}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *сходится при условии* $q < 1$ и *расходится при условии* $q > 1$.

Ясно, что предельная форма менее общая, чем первая. Впрочем, используя понятия верхнего и нижнего предела, и заменив условия 1) и 2) (формулы (6) и (7)) на следующие

1) если $\overline{\lim_{x\to+\infty}} \dfrac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} < 1$, то ряд сходится;

2) если $\underline{\lim_{x\to+\infty}} \dfrac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} > 1$, то ряд расходится,

можно значительно усилить предельную форму признака Ермакова.

2. Доказательство признака Ермакова. Все известные в литературе доказательства признака Ермакова основаны на применении интегрального признака Коши – Маклорена [2-6], причём в последних четырёх книгах приводится доказательство только показательного признака Ермакова. В связи с этим мы дадим доказательство общего признака Ермакова, приведённого выше (см. формулы (6) и (7)), так как доказательство самого Ермакова с современной точки зрения не является строгим. Доказательство первой части является более простым, чем изложенное в [3, 5, 6]. Идея его заимствована у Фабри [4], который привёл подобное доказательство для дискретного варианта признака Ермакова (см. пункт 4).

Рассмотрим сначала первый случай. Из неравенства (6) следует

$$f(\varphi(x))\varphi'(x) \le qf(x), \quad q<1, \quad x \ge x_0. \tag{9}$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[1,\infty)$, то на любом отрезке $[x_0,x]$ из этого промежутка функция $f(x)$ интегрируема. Так как $x_0 < x$ и $x_0 < \varphi(x_0)$, то в силу монотонности функции $\varphi(x)$ имеем $x_0 < \varphi(x_0) < \varphi(x)$. Следовательно, отрезок $[\varphi(x_0),\varphi(x)]$ принадлежит промежутку $[1,\infty)$. Интегрируя функцию $f(t)$ по этому отрезку и совершая замену переменных $t=\varphi(u)$, получим

$$\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

Для справедливости этой формулы достаточно, чтобы функция $f(t)$ была непрерывна на отрезке $[\varphi(x_0),\varphi(x)]$, а производная $\varphi'(u)$ была непрерывна на отрезке $[x_0,x]$ [7]. Эти условия обеспечены условиями признака Ермакова. Используя неравенство (9) и неравенство $\varphi(x) > x$, из последнего равенства получим

$$\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(\varphi(u))\varphi'(u)du \le q\int_{x_0}^{x} f(u)du \le q\int_{x_0}^{\varphi(x)} f(u)du$$

или

$$\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(t)dt \le q\int_{x_0}^{\varphi(x)} f(u)du.$$

Так как $\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(t)dt = \int_{x_0}^{\varphi(x)} f(t)dt - \int_{x_0}^{\varphi(x_0)} f(t)dt$, то

$$\int_{x_0}^{\varphi(x)} f(t)dt - \int_{x_0}^{\varphi(x_0)} f(t)dt \le q\int_{x_0}^{\varphi(x)} f(u)du$$

или

$$\int_{x_0}^{\varphi(x)} f(t)dt \le \frac{1}{1-q}\int_{x_0}^{\varphi(x_0)} f(t)dt.$$

В силу того, что $\varphi(x) > x > x_0$ и $f(x) > 0$, мы можем усилить неравенство

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt \le \int_{x_0}^{\varphi(x)} f(t)dt \le \frac{1}{1-q}\int_{x_0}^{\varphi(x_0)} f(t)dt. \quad (10)$$

Поскольку $f(x) > 0$ и значение x произвольно, лишь бы $x > x_0$, то из неравенства (10) следует, что несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(t)dt$ сходится. В таком случае, согласно признаку Коши – Маклорена, ряд так же $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходятся. Первая часть признака Ермакова доказана.

Рассмотрим теперь второй случай. Из неравенства (7) следует, что

$$f(\varphi(x))\varphi'(x) \ge f(x), \quad x \ge x_0. \quad (11)$$

Интегрируя функцию $f(t)$ по отрезку $[\varphi(x_0), \varphi(x)]$, получим, применяя подстановку $t = \varphi(u)$, (её обоснование дано при доказательстве первого случая)

$$\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(\varphi(u))\varphi'(u)du \ge \int_{x_0}^{x} f(u)du.$$

Прибавляя к обеим частям неравенства интеграл $\int_{x}^{\varphi(x_0)} f(t)dt$, получим

$$\int_{x}^{\varphi(x)} f(t)dt \ge \int_{x_0}^{\varphi(x_0)} f(t)dt = L \quad (12)$$

Так как $\varphi(x_0) > x_0$ и $f(t) > 0$, то $L > 0$. Зададим теперь последовательность $\{x_i\}$ следующим образом:

$$x_i = \varphi(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots .$$

Из неравенства (12) следует, что

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt \ge L, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

Суммируя первые n неравенств, получим

$$\int_{x_0}^{x_n} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt \ge nL,$$

то есть интеграл $\int_{x_0}^{x_n} f(t)dt$ неограничен при $n \to \infty$. Так как $\varphi(x) > x$, то последовательность $\{x_i\}$ строго монотонно возрастает в силу того, что $x_i = \varphi(x_{i-1}) > x_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$. Предположим, что она ограничена сверху. Тогда последовательность сходится к некоторому пределу *b*, причём $x_i < b$ для любого номера *i*. Поэтому для любого натурального числа *n* должно выполняться неравенство

$$\int_{x_0}^{b} f(t)dt \ge \int_{x_0}^{x_n} f(t)dt \ge nL,$$

что невозможно, так как правая часть неравенства неограниченно возрастает с ростом *n*. Следовательно, последовательность $\{x_i\}$ неограниченна сверху и несобственный интеграл расходится

$$\int_{x_0}^{\infty} f(t)dt = \lim_{x \to \infty} \int_{x_0}^{x} f(t)dt = +\infty .$$

В таком случае, согласно интегральному признаку Коши – Маклорена ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ также расходится. Вторая часть признака Ермакова доказана.

3. Доказательство признака сходимости Ермакова в предельной форме. Пусть $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} = q$. Зададим произвольно малое число $\varepsilon > 0$. Тогда из существования предела следует, что для заданного ε можно указать такое число x_ε (очевидно, что можно считать $x_\varepsilon \ge 1$), что для всех $x \ge x_\varepsilon$ будет выполняться неравенство

$$q-\varepsilon < \frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} < q+\varepsilon .$$

Если $0 \le q < 1$, то в этом случае выберем ε так, чтобы $q+\varepsilon<1$. Тогда условие (6) будет выполнено и, согласно доказанному в пункте 2 признаку Ермакова, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ будет сходиться. Если $1<q<+\infty$, то выберем ε так, чтобы $q-\varepsilon>1$. Тогда условие (7) будет выполнено и, согласно признаку Ермакова, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ будет расходиться. Если $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} = +\infty$, то для любого $q \ge 1$ найдётся такое $x_0 \ge 1$, что для всех $x \ge x_0$ будет выполнено неравенство $1 \le q < \frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)}$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится.

Пусть теперь правый предел $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} = q < 1$. Это означает, что для любого малого $\varepsilon>0$ найдётся такое x_ε (очевидно, можно считать, что $x_\varepsilon \ge 1$), что для всех $x \ge x_\varepsilon$ будет выполняться неравенство $\frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} < q+\varepsilon$. Выбрав ε из условия $q+\varepsilon<1$, приходим к выводу, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ будет сходиться. Пусть теперь левый предел $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} = q > 1$. В этом случае для любого малого $\varepsilon>0$ найдётся такое x_ε (очевидно, можно считать, что $x_\varepsilon \ge 1$), что для всех $x \ge x_\varepsilon$ будет выполняться неравенство $\frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} > q-\varepsilon$. Выбрав ε из условия $q-\varepsilon>1$, приходим к выводу, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ будет расходиться. Если $\varliminf_{x\to+\infty} \frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} = +\infty$, то для любого $q > 1$ найдётся такое $x_0 \geq 1$, что для всех $x \geq x_0$ будет выполнено неравенство $\frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} > q$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится.

Приведём примеры.

A) Если $f(x) = \frac{1}{x \ln^2(x)}$, то применяя правило Лопиталя дважды подряд, получим

$$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \frac{e^x x \ln^2(x)}{e^x \ln^2(e^x)} = \frac{\ln^2(x)}{x} \to \frac{2\ln x}{x} \to \frac{2}{x} \to 0, \text{ если } x \to +\infty .$$

Отсюда, согласно показательному признаку Ермакова, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ сходится.

B) Если $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, то $\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \ln x \to +\infty,\ x \to +\infty$. Отсюда, согласно показательному признаку Ермакова, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ расходится.

4. Дискретный признак сходимости Ермакова. Изложенный выше признак сходимости Ермакова можно изложить в дискретной форме. Впервые такой вариант признака сходимости Ермакова был предложен французским математиком Евгением Фабри в 1911 году [4]. Однако он остался не замеченным другими математиками.

Дискретный признак Ермакова. *Пусть дан строго положительный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{13}$$

с монотонно убывающими членами

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots . \tag{14}$$

Пусть $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ *- строго возрастающая бесконечная последовательность натуральных чисел*

$$n_0 = 1 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots, \tag{15}$$

удовлетворяющая условию

$$n_k > k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{16}$$

Тогда:

1) *если начиная с некоторого значения* $k_0 \geq 1$ *выполняется условие*

$$\frac{(n_{k+1} - n_k) a_{n_k}}{a_k} \leq q < 1, \quad k \geq k_0, \tag{17}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

2) *если начиная с некоторого значения* $k_0 \geq 1$ *выполняется условие*

$$\frac{(n_k - n_{k-1}) a_{n_k}}{a_k} \geq 1, \quad k \geq k_0, \tag{18}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Дадим доказательство дискретного признака Ермакова. Доказательство первой части основано на идеях доказательства Фабри [4]. Доказательство второй части следует доказательству непрерывного случая признака Ермакова (см. пункт 2). В основе доказательства лежат два очевидных неравенства, справедливых в случае монотонно убывающих слагаемых $a_k \geq a_{k+1}$

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{k+2} + a_{k-1} \leq (k-n) a_n, \tag{19}$$

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots + a_{k-1} + a_k \geq (k-n) a_k . \tag{20}$$

Начнём с первого случая 1). Рассмотрим следующую сумму членов ряда (13)

$$\sum_{m=n_{k_0}}^{n_{k+1}-1} a_m = \left(a_{n_{k_0}} + \ldots + a_{n_{k_0+1}-1}\right) + \left(a_{n_{k_0+1}} + \ldots + a_{n_{k_0+2}-1}\right) + \ldots + \left(a_{n_{k-1}} + \ldots + a_{n_k-1}\right) +$$

$$+\left(a_{n_k} + \ldots + a_{n_{k+1}-1}\right) = \sum_{m=k_0}^{k}\left(a_{n_m} + \ldots + a_{n_{m+1}-1}\right).$$

Так как члены ряда (13) не возрастают, то, с учётом неравенств (17) и (19), отсюда получим

$$\sum_{m=n_{k_0}}^{n_{k+1}-1} a_m = \sum_{m=k_0}^{k}\left(a_{n_m} + \ldots + a_{n_{m+1}-1}\right) \le \sum_{m=k_0}^{k}\left(n_{m+1} - n_m\right) a_{n_m} \le q \sum_{m=k_0}^{k} a_m .$$

Учитывая, что $n_{k+1} - 1 > (k+1) - 1 = k$ и что члены ряда (13) положительны, последнего неравенства можно усилить

$$\sum_{m=n_{k_0}}^{n_{k+1}-1} a_m \le q \sum_{m=k_0}^{k} a_m \le q \sum_{m=k_0}^{n_{k+1}-1} a_m .$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{m=n_{k_0}}^{n_{k+1}-1} a_m = \sum_{m=k_0}^{n_{k+1}-1} a_m - \sum_{m=k_0}^{n_{k_0}-1} a_m \le q \sum_{m=n_{k_0}}^{n_{k+1}-1} a_m .$$

Поэтому из последнего неравенства, выбирая k из условия $k > n_{k_0}$, получаем оценку

$$\sum_{m=n_{k_0}}^{k} a_m \le \sum_{m=n_{k_0}}^{n_{k+1}-1} a_m \le \frac{1}{1-q} \sum_{m=k_0}^{n_{k_0}-1} a_m ,$$

из которой следует, что ряд (13) сходится, если справедливо условие (17). Первый случай доказан.

Перейдём к доказательству второго случая 2). Рассмотрим следующую сумму членов ряда (13)

$$\sum_{m=n_{k_0-1}+1}^{n_k} a_m = \left(a_{n_{k_0-1}+1} + \ldots + a_{n_{k_0}}\right) + \left(a_{n_{k_0}+1} + \ldots + a_{n_{k_0+1}}\right) + \ldots + \left(a_{n_{k-2}+1} + \ldots + a_{n_{k-1}}\right) +$$

$$+\left(a_{n_{k-1}+1}+\ldots+a_{n_k}\right)=\sum_{m=k_0}^{k}\left(a_{n_{m-1}+1}+\ldots+a_{n_m}\right).$$

Так как члены ряда (13) не возрастают, то, с учётом неравенств (18) и (20), получим

$$\sum_{m=n_{k_0-1}+1}^{n_k} a_m=\sum_{m=k_0}^{k}\left(a_{n_{m-1}+1}+\ldots+a_{n_m}\right)\geq\sum_{m=k_0}^{k}\left(n_m-n_{m-1}\right)a_{n_m}\geq\sum_{m=k_0}^{k} a_m .$$

Выберем величину k из условия $k>n_{k_0-1}+1>k_0-1+1=k_0$, тогда получим

$$\sum_{m=n_{k_0-1}+1}^{n_k} a_m=\sum_{m=n_{k_0-1}+1}^{k} a_m+\sum_{m=k+1}^{n_k} a_m\geq\sum_{m=k_0}^{k} a_m=\sum_{m=k_0}^{n_{k_0-1}} a_m+\sum_{m=n_{k_0-1}+1}^{k} a_m$$

или

$$\sum_{m=k+1}^{n_k} a_m\geq\sum_{m=k_0}^{n_{k_0-1}} a_m=L>0. \tag{21}$$

Зададим теперь последовательность натуральных чисел

$$x_0=k_0,\quad x_k=n_{x_{k-1}},\quad k=1,2,3,\ldots.$$

Из неравенства (21) следует, что

$$\sum_{m=x_{k-1}+1}^{x_k} a_m\geq\sum_{m=x_0}^{x_1} a_m=\sum_{m=k_0}^{n_{k_0-1}} a_m=L>0,\quad k=2,3,4,\ldots.$$

Суммируя первые $n-1$ неравенств, получим

$$\sum_{m=x_0}^{x_n} a_m=\sum_{m=x_1+1}^{x_n} a_m+\sum_{m=x_0}^{x_1} a_m=\sum_{k=2}^{n}\sum_{m=x_{k-1}+1}^{x_k} a_m+L\geq(n-1)L+L=nL,$$

то есть ряд неограничен при $n\to\infty$. Так как $n_k>k$, то последовательность $\{x_i\}$ строго монотонно возрастает в силу того, что $x_i=n_{x_{i-1}}>x_{i-1},\quad i=1,2,3,\ldots,n,\ldots$ и принимает только натуральные значения. Следовательно, она не может быть ограниченной сверху в силу неограниченности натурального ряда. Тогда $x_i \to +\infty$, если $i \to +\infty$ и бесконечный ряд расходится

$$\sum_{m=x_0}^{\infty} a_m = \lim_{x\to\infty} \sum_{m=x_0}^{x_n} a_m = +\infty .$$

Раз расходится остаток $\sum_{m=x_0}^{\infty} a_m = \lim_{x\to\infty} \sum_{m=x_0}^{x_n} a_m = +\infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Вторая часть дискретного признака Ермакова доказана.

Дискретный признак Ермакова так же можно сформулировать в предельной форме.

Дискретный признак Ермакова в предельной форме. *Пусть дан строго положительный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{22}$$

с монотонно убывающими членами

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge ... \ge a_n \ge ... . \tag{23}$$

Пусть $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ *- строго возрастающая бесконечная последовательность натуральных чисел*

$$n_0 = 1 < n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k < ..., \tag{24}$$

удовлетворяющая условию

$$n_k > k, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{25}$$

Тогда

1) *если выполняется условие*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(n_{k+1} - n_k) a_{n_k}}{a_k} < 1, \tag{26}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

2) *если выполняется условие*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(n_k - n_{k-1})a_{n_k}}{a_k} > 1, \tag{27}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Используя понятия верхнего и нижнего предела, и заменив условия 1) и 2) (формулы (26) и (27)) на следующие

1) если $\overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{(n_{k+1} - n_k)a_{n_k}}{a_k} < 1$, то ряд сходится;

2) если $\underline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{(n_k - n_{k-1})a_{n_k}}{a_k} > 1$, то ряд расходится;

можно значительно усилить предельную форму дискретного признака Ермакова.

Доказательство дискретного признака Ермакова дословно повторяет доказательство признака Ермакова в непрерывном случае. По этой причине мы его опускаем.

Дискретный признак Ермакова удобно применять в показательной форме, выбирая в качестве натуральной последовательности n_k показательную последовательность $n_k = 2^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда ряд (13) сходится, если

1) *начиная с некоторого значения* $k_0 \geq 1$ *выполняется условие*

$$\frac{2^k a_{2^k}}{a_k} \leq q < 1, \quad k \geq k_0, \tag{28}$$

2) *или выполняется условие*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^k a_{2^k}}{a_k} = q < 1, \tag{29}$$

Ряд (13) расходится, если

1) *начиная с некоторого значения* $k_0 \geq 1$ *выполняется условие*

$$\frac{2^k a_{2^k}}{a_k} > 2, \quad k \geq k_0, \tag{30}$$

2) *или выполняется условие*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^k a_{2^k}}{a_k} = q > 2, \tag{31}$$

Заметим, что если обратиться к предельному признаку Ермакова в непрерывной форме, то очевидно, что функция $\varphi(x) = 2^x$ удовлетворяет его условиям применимости. Так как $\varphi'(x) = 2^x \ln 2$, то условием сходимости будет

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^k a_{2^k}}{a_k} < \log_2 e,$$

а условием расходимости будет

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^k a_{2^k}}{a_k} > \log_2 e.$$

Отсюда можно сделать вывод, что дискретный показательный признак сходимости Ермакова не применим, если

$$1 \leq \lim_{k\to\infty} \frac{2^k a_{2^k}}{a_k} \leq 2. \tag{32}$$

Заключение. Признак Ермакова представлен в непрерывной и дискретной форме. Приведены его обновлённые доказательства в обоих случаях. Рассмотрен предельный вариант признака Ермакова. Указано, что дискретная форма показательного признака Ермакова не применима при выполнении условия (32), в то время как непрерывная форма этого признака не применима только при одном значении предела. В следующей работе, как надеется автор, этот недостаток будет устранён.

Следует заметить, что формулировка признака Ермакова не содержит упоминание интеграла. Поэтому было бы интересным предложить доказательство признака Ермакова без обращения к интегральному признаку сходимости Коши – Маклорена. В известной книге Кноппа [5] об этом на 289 странице сказано так: “Es ist nicht schwer, den Beweis von Hilfsmittel des Integrals zu befreien; doch wird er dadurch ethwas schwerfälliger”. В переводе на русский это означает следующее: «Не трудно привести доказательство без применения интегралов, но оно станет более громоздким». С тех пор прошло 96 лет, но никто не привёл этого более громоздкого доказательства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ermakov V.P. Caractère de convergence des sèries. – Bull. sci. math., 1871, T.2, p. 250-256.

2. Ермаков В.П. Теория сходимости бесконечных строк и определенных интегралов. Матем. сб., Т.6, Вып. 1, (1872), с. 39–76.

3. Bromwich T.J.I. Introduction to the Theory of Infinite Series. – London: Macmillan and Com., 1908. – 511 p.

4. Fabry E. Théorie des séries a termes constants applications aux calculs numériques. – Paris: Hermann, 1910. – 198 p.

5. Knopp K. Theorie und anwendung der unendlichen reihen. – Berlin, Springer, 1922. – 474 s.

6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.II. – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 864 с.

7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.I. – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 680 с.

REFERENCES

1. Ermakov V.P. Caractère de convergence des sèries. – Bull. sci. math., 1871, T.2, p. 250-256.

2. Ermakov V.P. Teoriya skhodimosti beskonechnykh strok i opredelennykh integralov. Matem. sb., T.6, Vyp. 1, (1872), s. 39–76.

3. Bromwich T.J.I. Introduction to the Theory of Infinite Series. – London: Macmillan and Com., 1908. – 511 p.

4. Fabry E. Théorie des séries a termes constants applications aux calculs numériques. – Paris: Hermann, 1910. – 198 p.

5. Knopp K. Theorie und anwendung der unendlichen reihen. – Berlin, Springer, 1922. – 474 s.

6. Fikhtengolts G.M. Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya. T.II. – 8-e izd. – M.: FIZMATLIT, 2003. – 864 s.

7. Fikhtengolts G.M. Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya. T.I. – 8-e izd. – M.: FIZMATLIT, 2003. – 680 s.

ABOUT SIGN OF CONVERGENCE ERMAKOV'S

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072,
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

Ermakov's test of a strictly positive series with monotonically decreasing terms is considered. Since in the mathematical literature describes, as a rule, only the most important special case of the so-called Ermakov's test (continuous form), the proof of Ermakov's test is given in general, including the form of limit. The discrete analog of Ermakov's test found by the French mathematician Fabri is considered. Its incompleteness is pointed out and its proof partially different from that of Fabry is prompted.

Key words: infinite series, positive infinite series, infinite series with the decreasing terms, Ermakov's test, E. Fabry.