УДК 517.521

# *БАЗЕЛЬСКАЯ ЗАДАЧА II. МЕТОД БРАТЬЕВ ЯГЛОМ И ЕГО ОБОБЩЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЁННОЙ БАЗЕЛЬСКОЙ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ ЧЕТНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ, РАВНОГО ЧЕТЫРЁМ, ШЕСТИ, ВОСЬМИ И ДЕСЯТИ*

**И.В. ТЕРЕЩЕНКО**

*Кубанский государственный технологический университет*
*350072, г. Краснодар, ул. Московская, 2, корпус А,*
*e-mail:* tereshchenko57@rambler.ru

Рассмотрена задача вычисления сумм чисел обратных четвёртой, шестой, восьмой и десятой степени методом братьев Яглом. Этот метод первоначально был ими использован для решения частного случая – знаменитой базельской задачи. После подробного рассмотрения этого частного случая показано, как можно обобщить метод братьев Яглом для решения задачи о суммирование ряда чисел обратных четвёртой, шестой, восьмой и десятой степени без использования разложения в бесконечное произведение.
В работе получены новые тригонометрические формулы, которые используются при выводе сумм рассматриваемых рядов.
Ключевые слова: Эйлер, Коши, гармонический ряд, базельская задача, обобщённая базельская задача, числа Бернулли, сумма бесконечного ряда.

**1. Введение.** Базельской задачей называется задача разыскания суммы бесконечного ряда обратных квадратов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots. \tag{1}$$

Обобщенной базельской задачей называется задача вычисления суммы бесконечного ряда чисел, обратных степеням натуральных чисел.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots. \tag{2}$$

Эту задачу частично решил Эйлер [1,2], найдя сумму ряда (2) для произвольного четного натурального показателя степени $p=2m$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}=\frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!}B_m, \tag{3}$$

где

$m\geq 1$ - натуральное число,

$B_m$ - числа Бернулли $\left(B_1=\frac{1}{6}, B_2=\frac{1}{30}, B_3=\frac{1}{42}, B_4=\frac{1}{30}, B_5=\frac{5}{66}, \ldots\right)$, названные по имени Якова Бернулли, который ввел их для вычисления суммы [3].

В нашей первой статье [4], посвященной базельской задаче была изложена её краткая история и рассмотрено её решение методом Коши [5,6]. Затем этот метод был обобщён для нахождения суммы ряда обратных четвертым степеням натуральных чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{n^4}+\ldots. \tag{4}$$

Метод Коши оказался технически сложным, чтобы вычислять с его помощью суммы ряда (2) для четного натурального показателя $m \geq 6$.

**2. Решение братьев Яглом Базельской задачи.** В 1954 году братья И.М. Яглом и А.М. Яглом [7] привели решение базельской задачи, усовершенствовав метод Коши, изложенный в предыдущей работе [4].

Вместо тригонометрического равенства

$$\frac{2(k+1)(k-1)}{3}=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2k}}+\frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{2k}}+\ldots+\frac{1}{\sin^2\frac{(k-1)\pi}{2k}}, \tag{5}$$

используемого в методе Коши, они воспользовались похожим равенством

$$\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{2n+1}+\mathrm{ctg}^2\frac{2\pi}{2n+1}+\ldots+\mathrm{ctg}^2\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3}, \quad n=1,2,3,\ldots, \tag{6}$$

доказав его тем же способом, которым Коши доказал равенство (5). Приведем это доказательство применительно к равенству (6).

Для этого воспользуемся формулой Муавра

$$\cos(2n+1)\alpha+i\sin(2n+1)\alpha=\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)^{2n+1}$$

и применим к правой части равенства формулу бинома Ньютона

$$\cos(2n+1)\alpha + i\sin(2n+1)\alpha = \sum_{m=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{2n+1-m} \cos^{2n+1-m}\alpha \left(i\sin\alpha\right)^m =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_{2n+1}^{2n+1-2m} \cos^{2n+1-2m}\alpha \sin^{2m}\alpha + i\sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_{2n+1}^{2n-2m} \cos^{2n-2m}\alpha \sin^{2m+1}\alpha .$$

Приравняв мнимые части, и разделив их на произведение $C_{2n+1}^{2n}\sin^{2n+1}\alpha$, получим

$$\frac{\sin(2n+1)\alpha}{C_{2n+1}^{2n}\sin^{2n+1}\alpha} = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{C_{2n+1}^{2n-2m}}{C_{2n+1}^{2n}} \operatorname{ctg}^{2n-2m}\alpha .$$

Положим здесь $\alpha_k = \dfrac{k\pi}{2n+1}$, $k = 1, 2, 3, ..., n$. Так как $\sin\alpha_k \neq 0$ и $\sin(2n+1)\alpha_k = 0$ для значений $k = 1, 2, 3, ..., n$, то из предыдущего равенства следует

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{C_{2n+1}^{2n-2m}}{C_{2n+1}^{2n}} \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2n+1}\right)^{n-m} = 0 . \tag{7}$$

Из последнего равенства можно сделать вывод, что $n$ чисел

$$x_k = \operatorname{ctg}^2\alpha_k = \operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{2n+1}, \quad k = 1, 2, 3, ..., n \tag{8}$$

являются простыми корнями приведенного многочлена $n$-й степени, то есть многочлена с коэффициентом равным 1 при старшей степени $x^n$

$$P_n(x) = \frac{1}{C_{2n+1}^{2n}} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_{2n+1}^{2n-2m} x^{n-m} = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_{2n+1}^{2n-2m} x^{n-m} . \tag{9}$$

В таком случае, согласно следствию из основной теоремы алгебры, других корней у многочлена $P_n(x)$ быть не может. Поскольку коэффициент при старшей степени многочлена $P_n(x)$ равен $C_{2n+1}^{2n}\big/(2n+1) = 1$, и все корни многочлена $P_n(x)$ простые, то его можно разложить на $n$ множителей следующим образом, воспользовавшись формулой (8)

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

Раскрывая скобки и группируя слагаемые по степеням $x$, получим

$$P_n(x) = x^n - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) x^{n-1} + \left(\sum_{1\le k_1<k_2\le n} x_{k_1}x_{k_2}\right) x^{n-2} - \left(\sum_{1\le k_1<k_2<k_3\le n} x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}\right) x^{n-3} + ...$$

$$... + (-1)^m \left(\sum_{1\le k_1<k_2<...<k_m\le n} x_{k_1}x_{k_2}...x_m\right) x^{n-m} + ... + (-1)^{n-1} \left(\sum_{1\le k_1<k_2<...<k_{n-1}\le n} x_{k_1}x_{k_2}...x_{k_{n-1}}\right) x +$$

$$+(-1)^n x_1 x_2 ... x_n . \qquad (10)$$

Так как любой многочлен можно разложить по степеням $x$ единственным образом, то из формул (9) и (10) следует, что коэффициенты при степени $x^{n-m}$ в них должны быть равны друг другу

$$\sum_{1\le k_1<k_2<...<k_m\le n} x_{k_1}x_{k_2}...x_{k_m} = \frac{C_{2n+1}^{2n-2m}}{2n+1} = \frac{(2n)!}{(2n-2m)!(2m+1)!}, \qquad (11)$$

где $m = 1, 2, ..., n$ и $n = 1, 2, 3, ...$. Равенство (6) получается из общего равенства (11), если положить в нём $m = 1$ и воспользоваться формулой (8).

Воспользуемся теперь известным неравенством [5,6]

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

которое, после возведения его в квадрат, перепишем как

$$\sin^2\alpha < \alpha^2 < \operatorname{tg}^2\alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

или

$$\operatorname{ctg}^2\alpha < \frac{1}{\alpha^2} < \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}. \qquad (12)$$

Применяя неравенство (12) для углов $\alpha_k = \frac{k\pi}{2n+1}$, $k = 1, 2, 3, ..., n$, получим цепочку неравенств

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n+1}<\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}<1+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n+1},$$

$$\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2n+1}<\frac{(2n+1)^2}{2^2\pi^2}<1+\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2n+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2n+1}<\frac{(2n+1)^2}{n^2\pi^2}<1+\operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2n+1}.$$

Складывая эти неравенства почленно, придем к неравенству

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{2n+1}<\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<n+\sum_{k=1}^{n}\operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{2n+1}.$$

Умножим последнее неравенство на множитель $\dfrac{\pi^2}{(2n+1)^2}$ и воспользуемся равенством (6). Тогда получим

$$\frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\frac{\pi^2 n2(n+1)}{3(2n+1)^2}. \qquad (13)$$

Так как пределы левой и правой части неравенства (13) равны друг другу

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2 n(2n+1)}{3(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

то, по теореме о двух милиционерах, находим предел

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Тем самым, базельская задача решена.

**3. Решение обобщенной Базельской задачи методом братьев Яглом для значений показателя $p=4$.** Метод братьев Яглом достаточно просто применить для ряда (2) с показателем $p=4$. Воспользуемся неравенством (12) и возведём его в квадрат

$$\operatorname{ctg}^4\alpha < \frac{1}{\alpha^4} < 1 + 2\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^4\alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Просуммировав все части это неравенства по значениям углов $\alpha_k = \dfrac{k\pi}{2n+1}, \quad k = 1, 2, 3, ..., n$, получим неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{ctg}^4\frac{k\pi}{2n+1} < \frac{(2n+1)^4}{\pi^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4} < n + 2\sum_{k=1}^{n}\operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{2n+1} + \sum_{k=1}^{n}\operatorname{ctg}^4\frac{k\pi}{2n+1}$$

или, учитывая формулу (8),

$$\pi^4\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}{(2n+1)^4} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4} < \pi^4\frac{n + 2\sum_{k=1}^{n}x_k + \sum_{k=1}^{n}x_k^2}{(2n+1)^4}. \qquad .\ (14)$$

Возведя в квадрат равенство (6), находим, с учётом формулы (8), что

$$\left(\frac{n(2n-1)}{3}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}x_k^2 + 2\sum_{1\le k_1<k_2\le n}x_{k_1}x_{k_2}.$$

или

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^2 = \left(\frac{n(2n-1)}{3}\right)^2 - 2\sum_{1\le k_1<k_2\le n}x_{k_1}x_{k_2}. \qquad (15)$$

Положив в формуле (11) $m = 2$, будем иметь

$$\sum_{1\le k_1<k_2\le n}x_{k_1}x_{k_2} = \frac{C_{2n+1}^{2n-4}}{2n+1} = \frac{n(n-1)(2n-1)(2n-3)}{30}. \qquad (16)$$

Из формул (15) и (16) находим

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^2 = \frac{n(2n-1)}{45}\left(4n^2 + 10n^2 - 9\right). \qquad (17)$$

Из равенств (6) и (17) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\pi^4\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{45}\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n-1)\left(4n^2+10n^2-9\right)}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

$$\lim_{n\to\infty}\pi^4\frac{n+2\sum_{k=1}^{n}x_k+\sum_{k=1}^{n}x_k^2}{(2n+1)^4}=\pi^4\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

Следовательно, к неравенству (14) применима теорема о двух милиционерах, из которой следует окончательный результат (сравни с формулой (3) для значения $m=2$)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

**4. Решение обобщенной Базельской задачи методом братьев Яглом для значения показателя $p=6$.** Применим метод братьев Яглом к ряду (2) с показателем $p=6$. Для этого воспользуемся неравенством (12) и возведём его в куб

$$\operatorname{ctg}^6\alpha<\frac{1}{\alpha^6}<1+3\operatorname{ctg}^2\alpha+3\operatorname{ctg}^4\alpha+\operatorname{ctg}^6\alpha,\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Просуммировав все части это неравенства по значениям углов $\alpha_k=\frac{k\pi}{2n+1},\quad k=1,2,3,\ldots,n$, и пользуясь формулой (8), получим неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^3<\frac{(2n+1)^6}{\pi^6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^6}<n+3\sum_{k=1}^{n}x_k+3\sum_{k=1}^{n}x_k^2+\sum_{k=1}^{n}x_k^3$$

или

$$\frac{\pi^6}{(2n+1)^6}\sum_{k=1}^{n}x_k^3<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^6}<\pi^6\frac{n+3\sum_{k=1}^{n}x_k+3\sum_{k=1}^{n}x_k^2+\sum_{k=1}^{n}x_k^3}{(2n+1)^6}. \tag{18}$$

Из формул (6) и (17) следуют асимптотические равенства

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{ctg}^2\alpha_k=\frac{n(2n-1)}{3}=\frac{2}{3}n^2+o(n^2), \tag{19}$$

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^2=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{ctg}^4\alpha_k=\frac{n(2n-1)}{45}\left(4n^2+10n^2-9\right)=\frac{8}{45}n^4+o(n^4). \tag{20}$$

Здесь символ $o(n^k)$ означает числовую последовательность $u_n = u(n)$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u(n)}{n^k} = 0$.

Воспользуемся теперь тождеством из теории симметрических многочленов [7]

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^3 - 3\sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{1\le k_1<k_2\le n} x_{k_1}x_{k_2} + 3\sum_{1\le k_1<k_2<k_3\le n} x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}\,. \qquad (21)$$

Из формулы (16) следует, что

$$\sum_{1\le k_1<k_2\le n} x_{k_1}x_{k_2} = \frac{n(n-1)(2n-1)(2n-3)}{30} = \frac{2n^4}{15} + o(n^4)\,. \qquad (22)$$

Полагая в формуле (11) $m = 3$, получим, с учётом формулы (8) асимптотическое равенство

$$\sum_{1\le k_1<k_2<k_3\le n} x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3} == \frac{n(n-1)(n-2)(2n-1)(2n-3)(2n-5)}{630} = \frac{4n^6}{315} + o(n^6) \qquad (23)$$

Подставляя формулы (19), (22) и (23) в формулу (21), получим

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg}^6 \alpha_k = \frac{64n^6}{945} + o(n^6)\,. \qquad (24)$$

Из равенств (19), (20) и (24) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \pi^6 \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^3}{(2n+1)^6} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi^6}{(2n+1)^6}\left(\frac{64n^6}{945} + o(n^6)\right) = \frac{\pi^6}{945},$$

$$\lim_{n\to\infty} \pi^6 \frac{n + 3\sum_{k=1}^{n} x_k + 3\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} x_k^3}{(2n+1)^6} = \pi^6 \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^3}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{945}\,.$$

Следовательно, к неравенству (18) применима теорема о двух милиционерах, из которой следует окончательный результат (сравни с формулой (3) для значения $m = 3$)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^6}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\frac{\pi^6}{945}.$$

**5. Решение обобщенной Базельской задачи методом братьев Яглом для значения показателя $p=8$.** Применим метод братьев Яглом к ряду (2) с показателем $p=8$. Для этого воспользуемся неравенством (12) и возведём его в четвертую степень

$$\operatorname{ctg}^8\alpha<\frac{1}{\alpha^8}<1+4\operatorname{ctg}^2\alpha+6\operatorname{ctg}^4\alpha+4\operatorname{ctg}^6\alpha+\operatorname{ctg}^8\alpha,\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Просуммировав все части это неравенства по значениям углов $\alpha_k=\dfrac{k\pi}{2n+1},\quad k=1,2,3,...,n$, и пользуясь формулой (8), получим неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^4<\frac{(2n+1)^8}{\pi^8}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^8}<n+4\sum_{k=1}^{n}x_k+6\sum_{k=1}^{n}x_k^2+4\sum_{k=1}^{n}x_k^3+\sum_{k=1}^{n}x_k^4$$

или

$$\frac{\pi^8}{(2n+1)^8}\sum_{k=1}^{n}x_k^4<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^8}<\pi^8\,\frac{n+4\sum_{k=1}^{n}x_k+6\sum_{k=1}^{n}x_k^2+4\sum_{k=1}^{n}x_k^3+\sum_{k=1}^{n}x_k^4}{(2n+1)^6}.\tag{25}$$

Воспользуемся теперь тождеством из теории симметрических многочленов [7]

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^4=\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^4-4\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2\sum_{1\le k_1<k_2\le n}x_{k_1}x_{k_2}+2\left(\sum_{1\le k_1<k_2\le n}x_{k_1}x_{k_2}\right)^2+$$

$$+4\sum_{k=1}^{n}x_k\sum_{1\le k_1<k_2<k_3\le n}x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}-4\sum_{1\le k_1<k_2<k_3<k_4\le n}x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}x_{k_4}.\tag{26}$$

Полагая в формуле (11) $m=4$, получим, с учётом формулы (8) асимптотическое равенство

$$\sum_{1\le k_1<k_2<k_3<k_4\le n}x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}x_{k_4}=\frac{C_{2n+1}^{2n-8}}{2n+1}=$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)}{24680} = \frac{2n^8}{3085} + o(n^8)\,. \quad (27)$$

Подставляя формулы (19), (22), (23) и (27) в формулу (26), получим

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^4 = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg}^8 \alpha_k = \frac{128n^6}{4725} + o(n^6)\,. \qquad (28)$$

Из равенств (19), (20), (24) и (28) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \pi^8 \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^4}{(2n+1)^8} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi^8}{(2n+1)^8}\left(\frac{128n^8}{4725} + o(n^8)\right) = \frac{\pi^8}{9450}\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \pi^8 \frac{n + 4\sum_{k=1}^{n} x_k + 6\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} x_k^3 + \sum_{k=1}^{n} x_k^4}{(2n+1)^8} = \pi^8 \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^4}{(2n+1)^8} = \frac{\pi^8}{9450}\,.$$

Следовательно, к неравенству (25) применима теорема о двух милиционерах, из которой следует окончательный результат (сравни с формулой (3) для значения $m = 4$)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450}\,.$$

**6. Решение обобщенной Базельской задачи методом братьев Яглом для значения показателя $\boldsymbol{p = 10}$.** Применим метод братьев Яглом к ряду (2) с показателем $p = 10$. Для этого воспользуемся неравенством (12) и возведём его в пятую степень

$$\operatorname{ctg}^{10} \alpha < \frac{1}{\alpha^{10}} < 1 + 5\operatorname{ctg}^2 \alpha + 10\operatorname{ctg}^4 \alpha + 10\operatorname{ctg}^6 \alpha + 5\operatorname{ctg}^8 \alpha + \operatorname{ctg}^{10} \alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\,.$$

Просуммировав все части это неравенства по значениям углов $\alpha_k = \frac{k\pi}{2n+1}, \quad k = 1, 2, 3, ..., n$, и пользуясь формулой (8), получим неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^5 < \frac{(2n+1)^{10}}{\pi^{10}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{10}} < n + 5\sum_{k=1}^{n} x_k + 10\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 10\sum_{k=1}^{n} x_k^3 + 5\sum_{k=1}^{n} x_k^4 + \sum_{k=1}^{n} x_k^5$$

или

$$\frac{\pi^{10}\sum_{k=1}^{n}x_k^5}{(2n+1)^{10}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{10}}<\pi^{10}\frac{n+5\sum_{k=1}^{n}x_k+10\sum_{k=1}^{n}x_k^2+10\sum_{k=1}^{n}x_k^3+5\sum_{k=1}^{n}x_k^4+\sum_{k=1}^{n}x_k^5}{(2n+1)^{10}}. \quad (29)$$

Воспользуемся теперь тождеством из теории симметрических многочленов [7]

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^5=\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^5-5\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^3\sum_{1\le k_1<k_2\le n}x_{k_1}x_{k_2}+5\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\left(\sum_{1\le k_1<k_2\le n}x_{k_1}x_{k_2}\right)^2+$$

$$+5\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2\sum_{1\le k_1<k_2<k_3\le n}x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}-5\sum_{1\le k_1<k_2\le n}x_{k_1}x_{k_2}\sum_{1\le k_1<k_2<k_3\le n}x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}-$$

$$-5\sum_{k=1}^{n}x_k\sum_{1\le k_1<k_2<k_3<k_4\le n}x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}x_{k_4}+5\sum_{1\le k_1<k_2<k_3<k_4<k_5\le n}x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}x_{k_4}x_{k_5}. \quad (30)$$

Полагая в формуле (11) $m=5$, получим, с учётом формулы (8) асимптотическое равенство

$$\sum_{1\le k_1<k_2<k_3<k_4<k_5\le n}x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}x_{k_4}x_{k_5}=\frac{C_{2n+1}^{2n-10}}{2n+1}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)(2n-9)}{1247400}=,$$

$$=\frac{4n^{10}}{155925}+o(n^{10}). \quad (31)$$

Подставляя формулы (19), (22), (23), (27) и (31) в формулу (30), получим

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^5=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{ctg}^{10}\alpha_k=\frac{1024n^{10}}{93555}+o(n^{10}). \quad (32)$$

Из равенств (19), (20), (23), (27) и (32) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\pi^{10}\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k^5}{(2n+1)^{10}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^{10}}{(2n+1)^{10}}\left(\frac{1024n^{10}}{93555}+o(n^{10})\right)=\frac{\pi^{10}}{93555},$$

$$\lim_{n\to\infty}\pi^{10}\frac{n+5\sum_{k=1}^{n}x_k+10\sum_{k=1}^{n}x_k^2+10\sum_{k=1}^{n}x_k^3+5\sum_{k=1}^{n}x_k^4+\sum_{k=1}^{n}x_k^5}{(2n+1)^{10}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^{10}\sum_{k=1}^{n}x_k^5}{(2n+1)^{10}}=\frac{\pi^{10}}{93555}.$$

Следовательно, к неравенству (25) применима теорема о двух милиционерах, из которой следует окончательный результат (сравни с формулой (3) для значения 5)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{10}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{10}}=\frac{\pi^{10}}{93555}.$$

**7. Заключение.** Метод братьев И.М. Яглом и А.М. Яглом решения базельской задачи, предложенный ими в 1954 году, допускает обобщение для нахождения суммы чисел обратных четвертой, шестой, восьмой и десятой степени. Автор надеется, что в дальнейшем этот метод удастся изменить и упростить таким образом, чтобы стало возможным вычислить суммы чисел обратных любой чётной степени натуральных чисел.

Список литературы.

1.Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. – 580 с.

2.Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. Т.1. 2-е изд. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 315 с.

3.Кудрявцев В.А. Суммирование степеней чисел натурального ряда и числа Бернулли. – М. - Л.:, ОНТИ, 1936. – 73 с.

4.Терещенко И.В. Базельская задача I. Метод Коши и его обобщение для вычисления сумм чисел обратных четвёртой степени. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2014. № 2. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/41

5.Cauchy A.L. Cours d'analyse de l'École royale polytechnique I.re partie: Analyse algébrique. – Paris: Impr. royale Debure frères, 1821. – 576 p.

6. Bradley R. E., Sandifer C.E. (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences) Cauchys Cours danalyse. An Annotated Translation. Springer, 2009. – 411 с.

7. Яглом И.М., Яглом А.М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 543 с.

8. Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я. Симметрия в алгебре. 2-е изд. М.: МЦНМО, 2002. – 240 с.

REFERENCES

1. Eyler L. Differentsialnoe ischislenie. – M.-L.: GITTL, 1949. – 580 p.

2. Eyler L. Vvedenie v analiz beskonechnykh. T.1. 2-e izd. – M.: GIFML, 1961. – 315 p.

3. Kudryavtsev V.A. Summirovanie stepeney chisel naturalnogo ryada i chisla Bernulli. – M. - L.:, ONTI, 1936. – 73 p.

4. Tereshchenko I.V. Bazelskaya zadacha I. Metod Koshi i ego obobshchenie dlya vychisleniya summ chisel obratnykh chetvertoy stepeni. [Elektronnyy resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2014. № 2. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/41

5. Cauchy A.L. Cours d'analyse de l'École royale polytechnique I.re partie: Analyse algébrique. – Paris: Impr. royale Debure frères, 1821. – 576 p.

6. Bradley R. E., Sandifer C.E. (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences) Cauchys Cours danalyse. An Annotated Translation. Springer, 2009. – 411 p.

7. Yaglom I.M., Yaglom A.M. Neelementarnye zadachi v elementarnom izlozhenii. – M.: GITTL, 1954. – 543 p.

8. Boltyanskiy V.G., Vilenkin N.Ya. Simmetriya v algebre. 2-e izd. M.: MTsNMO, 2002. – 240 p.

# *THE BASEL PROBLEM II. THE BROTHERS JAGLOM METHOD AND ITS GENERALIZATION TO SOLVE THE GENERALIZED BASEL PROBLEM IN THE CASE OF EVEN INDEX*

**I.V. TERESHCHENKO**

*Kuban State Technological University*
*Building 2A, Moskovskaya st., Krasnodar, 350072 Russian Federation*
*e-mail: tereshchenko57@rambler.ru*

The problem of the precise summation of the reciprocals of the fourth, sixth, eighth and tenth power of the natural numbers by Yaglom brothers was considered. This method was originally used by them to solve the particular case - the famous Basel problem. Detailed consideration of this particular case shows how to generalize Yaglom brothers method to solve the problem of the summation of the reciprocals of the fourth, sixth, eighth and tenth power of the natural numbers without decomposition into an infinite product.
New trigonometric formulas were obtained that are used in the summation of the series under consideration.
Keywords: Basel problem, generalized Basel problem, Bernoulli numbers, sum of infinite series, Euler, Cauchy, summation of the reciprocals of the fourth power of the natural numbers.