УДК 517.521

О СУММИРОВАНИИ РЯДА ОБРАТНЫХ ОБОБЩЁННЫХ ТЕТРАЭДРИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ 8-ГО ПОРЯДКА

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

*Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2,
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru*

Рассмотрен ряд обратных обобщённых тетраэдрических чисел 8-го порядка. Предложен прямой метод вычисления определённого интеграла, величина которого равна сумме этого ряда. Показано, что сумма ряда выражается через квадратичные иррациональности.

Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, телескопический ряд, ряд обратных тетраэдрических чисел, тетраэдрические числа.

1. Сумма обратных обобщённых тетраэдрических чисел *k*-го порядка. В предыдущей нашей публикации [1] было введено определение *обобщённого тетраэдрического числа* или *обобщённого треугольного пирамидального числа* P_n

$$P_n^k = \frac{(kn+1)(kn+2)(kn+3)}{3!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

В дальнейшем мы будем опускать множитель $\frac{1}{3!}$ при рассмотрении чисел, обратных к обобщённым тетраэдрическим числам.

В этой же нашей статье [1] была найдена сумма ряда обратных обобщённых тетраэдрических чисел k порядка через интеграл

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(kn+1)(kn+2)(kn+3)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{1-x^k}\,dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \tag{1}$$

который был нами вычислен для значений $k = 1, 2, 3, 4$. В двух других наших статьях [2, 3] была вычислена сумма ряда обратных обобщённых тетраэдрических чисел 5-го и 6-го порядка соответственно.

2. Сумма ряда обратных обобщённых тетраэдрических чисел 8-го порядка. Вычислим сумму ряда (1) в случае $k = 8$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(8n+1)(8n+2)(8n+3)}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-x)^2}{1-x^8}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-x)\,dx}{1+x+x^2+\ldots+x^6+x^7}. \quad (2)$$

Для вычисления интеграла в формуле (2) разложим на множители многочлен, стоящий в знаменателе

$$x^7+x^6+\ldots+x+1=x^4\left(x^3+x^2+x+1\right)+\left(x^3+x^2+x+1\right)=$$

$$=\left(x^4+1\right)\left(x^3+x^2+x+1\right)=\left(x^4+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x+1\right). \quad (3)$$

Разложим теперь подынтегральную функцию в формуле (2) на простейшие дроби, используя разложение (3)

$$\frac{1-x}{\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^4+1}. \quad (4)$$

Умножая левую и правую части равенства (4) на двучлен $x+1$ и переходя в этом равенстве к пределу при $x\to -1$, получим

$$\lim_{x\to -1}\frac{1-x}{\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)}=\lim_{x\to -1}\left(A+(x+1)\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+(x+1)\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^4+1}\right)$$

или

$$\lim_{x\to -1}\frac{1-x}{\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)}=A.$$

Отсюда

$$A=\frac{1}{2}. \quad (5)$$

Подставив это значение в равенство (4) получим

$$\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^4+1}=\frac{1-x}{\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}=$$

$$=\frac{1-2x-x^2-x^4-x^6}{2(1+x)(x^2+1)(x^4+1)}=\frac{(1+x)(1-3x+2x^2-2x^3+x^4-x^5)}{2(1+x)(x^2+1)(x^4+1)}=$$

$$=\frac{1-3x+2x^2-2x^3+x^4-x^5}{2(x^2+1)(x^4+1)}. \quad (6)$$

Умножая правую и левую части равенства (6) на произведение квадратных трёхчленов, получим

$$Bx + C + \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^4 + 1}(x^2 + 1) = \frac{1 - 3x + 2x^2 - 2x^3 + x^4 - x^5}{2(x^4 + 1)}.$$

Положив в этом равенстве $x = i$, получим

$$Bi + C = -\frac{i}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$B = -\frac{1}{2},\ C = 0. \qquad (7)$$

Подставив эти значения в равенство (6) получим

$$\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^4 + 1} = \frac{1 - 3x + 2x^2 - 2x^3 + x^4 - x^5}{2(x^2 + 1)(x^4 + 1)} + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2 + 1} =$$

$$= \frac{1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + x^4}{2(x^2 + 1)(x^4 + 1)} = \frac{1 - 2x + x^2}{2(x^4 + 1)}. \qquad (8)$$

Следовательно,

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = -1, \quad d = \frac{1}{2}. \qquad (9)$$

Подставив найденные коэффициенты из формул (5), (7) и (9) в формулу (4), приходим к разложению

$$\frac{1 - x}{(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2}\frac{x^2 - 2x + 1}{x^4 + 1}. \qquad (10)$$

Зная, что

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

разложим на простейшие рациональные дроби последнюю рациональную дробь в формуле (10)

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}. \qquad (11)$$

После приведения к общему знаменателю, приравнивая числители, приходим к равенству

$$x^2-2x+1=(Ax+B)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

Полагая в этом равенстве последовательно $x=0$, $x=i$, $x=-i$, получим следующую систему линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов

$$\begin{cases} B+D=1, \\ B-D=\sqrt{2}, \\ A-C=0, \\ A+C=0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим значения неизвестных коэффициентов

$$A=0,\quad B=\frac{\sqrt{2}+1}{2},\quad C=0,\quad D=-\frac{\sqrt{2}-1}{2}. \tag{12}$$

Подставим их в разложение (11)

$$\frac{x^2-2x+1}{x^4+1}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Используя последнюю формулу, мы можем записать разложение (10)

$$\frac{1-x}{(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)}=\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{\frac{\sqrt{2}+1}{4}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{4}}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Вычислим теперь интеграл (2)

$$\int_0^1\frac{(1-x)dx}{x^7+x^6+\ldots+1}=\int_0^1\frac{\frac{1}{2}dx}{x+1}-\int_0^1\frac{\frac{x}{2}dx}{x^2+1}+\int_0^1\frac{\frac{\sqrt{2}+1}{4}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx-\int_0^1\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{4}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx=$$

$$=\frac{\ln 2}{4}+\frac{\sqrt{2}+1}{4}\int_0^1\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{2}-1}{4}\int_0^1\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln 2+\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)\Big|_0^1-\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{4}\ln 2+\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\ln 2-\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)-\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)= .$$

$$=\frac{\ln 2}{4}-\frac{\pi}{4}+\frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)-\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)}{2}+\frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\ln 2}{4}+\frac{\pi\left(\sqrt{2}-1\right)}{8}.$$

При вычислении интеграла мы использовали известные равенства

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)-\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)=\frac{\pi}{4}\ \text{и}\ \operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)=\frac{\pi}{2}.$$

Итак, сумма ряда (2) равна

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(8n+1)(8n+2)(8n+3)}=\frac{\ln 2}{8}+\frac{\pi\left(\sqrt{2}-1\right)}{16}. \tag{13}$$

Заключение. Рассмотрен ряд обратных обобщённых тетраэдрических чисел 8-го порядка. Вычислена его сумма в замкнутой форме (см. формулу (13)). Сумма этого ряда отсутствует в известных математических справочниках [4-6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Терещенко И.В. О суммировании ряда обобщенных тетраэдрических чисел *k*-го порядка. // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич.

журн. 2015. № 12. – [Электронный ресурс] – Режим доступа: URL: http://ntk.kubstu.ru/file/710.

2. Терещенко И.В. О суммировании ряда обратных обобщенных тетраэдрических чисел 5-го порядка. // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 13 – [Электронный ресурс] – Режим доступа: URL: http://ntk.kubstu.ru/file/731.

3. Терещенко И.В. О суммировании ряда обратных обобщенных тетраэдрических чисел 6-го порядка. // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 13 [Электронный ресурс] – Режим доступа: URL: http://ntk.kubstu.ru/file/732.

4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 800 с.

5. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Перевод с английского Н.В. Леви. – М. Наука, гл.ред.физ.-мат. лит., 1983.-176 с.

6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, рядов и произведений. 7-е изд. Перевод с английского В.В. Максимова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 1232 с.

REFERENCES

1. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada obobshchennykh tetraedricheskikh chisel k-go poryadka. // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 12. – [Elektronnyy resurs] – Rezhim dostupa: URL: http://ntk.kubstu.ru/file/710.

2. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada obratnykh obobshchennykh tetraedricheskikh chisel 5-go poryadka. // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 13 – [Elektronnyy resurs] – Rezhim dostupa: URL: http://ntk.kubstu.ru/file/731.

3. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada obratnykh obobshchennykh tetraedricheskikh chisel 6-go poryadka. // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 13 [Elektronnyy resurs] – Rezhim dostupa: URL: http://ntk.kubstu.ru/file/732.

4. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integraly i ryady. – M.: Nauka, Gl. red. fiz.-mat. lit., 1981. – 800 s.

5. Dvayt G.B. Tablitsy integralov i drugie matematicheskie formuly. Perevod s angliyskogo N.V. Levi. – M. Nauka, gl.red.fiz.-mat. lit., 1983.-176 s.

6. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tablitsy integralov, ryadov i proizvedeniy. 7-e izd. Perevod s angliyskogo V.V. Maksimova. - SPb.: BKhV-Peterburg, 2011.-1232 s.

ON THE SUMMATION OF THE INFINITE SERIES OF THE GENERALIZED TETRAHEDRAL NUMBERS' RECIPROCALS OF THE 8-TH ORDER

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072,
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

The infinite series of the generalized tetrahedral numbers’ reciprocals of the 8-th order is considered. A direct method of calculating the definite integral, whose value is equal to the sum of this series, was proposed. It is shown that the sum of the series is expressed in terms of quadratic irrationality.

Key words: infinite series, telescopic series, infinite series of the reciprocals of the tetrahedral numbers, tetrahedral numbers.