УДК 517.521+511.14

ОБ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ ЗНАЧЕНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С АРГУМЕНТОМ РАВНЫМ ДВУМ

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет
350072,Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2,
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

Методом Фурье доказана иррациональность значений двух цилиндрических функций $I_k(x)$ и $J_k(x)$ с аргументом равным двум для всех неотрицательных целых значений k.
Ключевые слова: иррациональное число, цилиндрическая функция, функция Бесселя, цилиндрическая функция мнимого аргумента, метод Фурье.

1. Введение. Как известно *иррациональным числом* называется вещественное число, которое не является рациональным, то есть которое не может быть представлено в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m - целое число, n - натуральное число. Так же хорошо известно, что иррациональные числа, и только они, представляются непериодическими бесконечными десятичными дробями и бесконечными непрерывными дробями.

В предыдущей нашей статье [1] были введены множества кека и нана чисел

$$\mathrm{Nana}(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^k},\quad k=1,2,3,\dots . \tag{1}$$

$$\mathrm{Keka}(k)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{1}{(n!)^k},\quad k=1,2,3,\dots . \tag{2}$$

и методом Фурье была доказана их иррациональность. Первые из этих чисел связаны с числом Эйлера

$$e=\mathrm{Nana}(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \text{ и } e^{-1}=\mathrm{Nana}(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}.$$

Вторые связаны со значением цилиндрической функции мнимого аргумента $Y_0(2)$ и функции Бесселя $J_0(2)$

$$\mathrm{Nana}(2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}=I_0(2)\,, \tag{3}$$

$$\mathrm{Keka}(k)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{1}{(n!)^k}=J_0(x)\,. \tag{4}$$

Иррациональность этих чисел позволяет утверждать, что числа

$$I_k(2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+k)!},\quad k=1,2,3,\ldots, \tag{5}$$

$$J_k(2)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n!(n+k)!},\quad k=1,2,3,\ldots, \tag{6}$$

которые являются значениями цилиндрической функции мнимого аргумента $I_k(x)$ и функции Бесселя $J_k(x)$ с аргументом $x=2$, так же иррациональны.

2. Доказательство иррациональности числа $I_k(2)$ методом Фурье. Будем исходить из ряда (5). Если допустить противное и считать, что число e - рациональное число, то

$$I_k(2)=\frac{p}{q}, \tag{7}$$

где целые положительные числа p и q образуют несократимую дробь. Обозначим через α_q и β_q, соответственно, частичную сумму и остаток ряда:

$$\alpha_q=\frac{1}{0!(k)!}+\frac{1}{1!(1+k)!}+\frac{1}{2!(2+k)!}+\ldots+\frac{1}{q!(q+k)!},\quad k=1,2,3,\ldots,$$

$$\beta_q=\frac{1}{(q+1)!(q+1+k)!}+\frac{1}{(q+2)!(q+2+k)!}+\frac{1}{(q+3)!(q+3+k)!}+\ldots,\quad k=1,2,3,\ldots.$$

Тогда

$$\beta_q=e-\alpha_q=\frac{p}{q}-\alpha_q. \tag{8}$$

Умножив обе части равенства (8) на $q!(q+k)!$, получим, что

$q!(q+k)!I_k(2)=p(q-1)!(q+k)!$ - целое число,

$$q!(q+k)!\alpha_q = \frac{q!(q+k)!}{0!k!} + \frac{q!(q+k)!}{1!(1+k)!} + \frac{q!(q+k)!}{2!(2+k)!} + ... + q(q+k)+1$$ - целое число,

$q!(q+k)!\beta_q = q!(q+k)!I_k(2) - q!(q+k)!\alpha_q$ - целое число как разность двух целых чисел.

Но $q!(q+k)!\beta_q$ не может быть целым, поскольку

$$0 < q!(q+k)!\beta_q = \frac{1}{(q+1)(q+1+k)} + \frac{1}{(q+1)(q+1+k)(q+2)(q+2+k)} + ... <$$

$$< \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^4} + \frac{1}{(q+1)^6} + ... = \frac{\frac{1}{(q+1)^2}}{1 - \frac{1}{(q+1)^2}} = \frac{1}{q(q+2)} < \frac{1}{q}.$$

Так, что $0 < q!(q+k)!\beta_q < \frac{1}{q}$. Отсюда заключаем, что $q!(q+k)!\beta_q$ - правильная дробь. Из полученного противоречия следует, что число $I_k(2)$ иррационально.

3. Доказательство иррациональности числа $J_k(2)$ модифицированным методом Фурье. Приведем модификацию метода Фурье, изложенную в [1]. Допустим, что число $J_k(2)$ рационально. Пусть, как и выше, α_q и β_q - соответственно частичная сумма и остаток ряда (6):

$$\alpha_q = \frac{1}{0!(k)!} - \frac{1}{1!(1+k)!} + \frac{1}{2!(2+k)!} - ... + (-1)^q \frac{1}{q!(q+k)!}, \quad k = 1, 2, 3, ...,$$

$$\beta_q = (-1)^{q+1}\left(\frac{1}{(q+1)!(q+1+k)!} - \frac{1}{(q+2)!(q+2+k)!} + \frac{1}{(q+3)!(q+3+k)!} - ...\right).$$

Тогда

$$\beta_q = J_k(2) - \alpha_q = \frac{p}{q} - \alpha_q. \tag{9}$$

Умножив обе части равенства (9) на $q!(q+k)!$, получим, что:

$q!(q+k)!J_k(2) = p(q-1)!(q+k)!$ - целое число,

$q!(q+k)!\alpha_q = \frac{q!(q+k)!}{0!k!} - \frac{q!(q+k)!}{1!(1+k)!} + ... + (-1)^{q-1} q(q+k) + (-1)^q 1$ - целое число,

$q!(q+k)!\beta_q = q!(q+k)! J_k(2) - q!(q+k)!\alpha_q$ - целое число как разность двух целых чисел.

Но $q!(q+k)!\beta_q$ не может быть целым, поскольку как сумма знакочередующегося ряда $\left|\beta_q\right| < \frac{1}{(q+1)!(q+1+k)!}$. Следовательно, $0 < \left|q!(q+k)!\beta_q\right| < \frac{1}{(q+1)(q+1+k)}$. Отсюда заключаем, что $q!(q+k)!\beta_q$ - правильная рациональная дробь. Из полученного противоречия следует, что число $J_k(2)$ иррационально.

Заключение. В данной работе впервые доказана иррациональность значений цилиндрических функций $I_k(2)$ и $J_k(2)$ для любого натурального *k*. В ней же отмечается, что иррациональность чисел $I_0(2)$ и $J_0(2)$ была фактически доказана в работе [1]. Отметим, что до сих пор неизвестно, трансцендентны ли эти числа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Терещенко И.В. Об иррациональности значений нана и кека функций натурального аргумента [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 12. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/690.

REFERENCES

1. Tereshhenko I.V. Ob irracional'nosti znachenij nana i keka funkcij natural'nogo argumenta [Jelektronnyj resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: jelektron. setevoj politematich. zhurn. 2015. № 12. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/690.

IRRATIONALITY OF VALUES OF CYLINDRICAL FUNCTIONS WITH AN ARGUMENT IS EQUAL TO TWO

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

By the Fourier method the irrationality of the values of the two cylinder functions $I_k(x)$ and $J_k(x)$ with an argument is equal to two for all non-negative integer values of k was proved.
Keywords: irrational number, cylindrical function, Bessel function, cylindrical function of imaginary argument, Fourier method.