УДК 517.521+511.14

ОБ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ ЗНАЧЕНИЙ НАНА И КЕКА ФУНКЦИЙ НАТУРАЛЬНОГО АРГУМЕНТА

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2,
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Посвящается памяти французского математика Роже Апери (Roger Apery, 1916-1994), который в 1979 году доказал, что число ζ(3), названное в его честь постоянной Апери, является иррациональным числом.

Рассмотрены две новые функции – нана и кека функции одного вещественного аргумента. Показано, что эти функции определены для положительных значений аргумента. Доказана их бесконечная дифференцируемость. Значения этих функций натурального аргумента названы нана и кека функций. Доказана иррациональность этих чисел методом Фурье. Вычислены значения первых трёх чисел с точностью до 12-го знака.
Ключевые слова: иррациональное число, метод Фурье, нана функция, кека функция, нана число, кека число.

1 Введение. Как известно *иррациональным числом* называется вещественное число, которое не является рациональным, то есть которое не может быть представлено в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m - целое число, n - натуральное число. Так же хорошо известно, что иррациональные числа, и только они, представляются непериодическими бесконечными десятичными дробями и бесконечными непрерывными дробями.

Доказательство иррациональности вещественного числа часто оказывается сложной задачей. Например, число π, равное отношению длины окружности к ее диаметру, было известно еще математикам древней Греции с VI века до нашей эры. Но доказать иррациональность этого числа они не сумели. Первое доказательство иррациональности числа π и другого замечательного числа e, а так же e^r, где r – рациональное число, было впервые получено в 1766 году немецким математиком, астрономом, физиком и философом Иоганном Ламбертом, путем разложения этих чисел в бесконечные непрерывные дроби [1]. Ламберт исходил из того факта, что если число записано в виде бесконечной непрерывной дроби, то оно не может быть рациональным. Доказательство этого утверждение он не привел. Отмеченный пробел в доказательстве Ламберта был устранен в 1794 году французским математиком Лежандром. Он же сумел доказать иррациональность числа π^2. Другое доказательство иррациональности числа π^2, а следовательно и $\pi = \sqrt{\pi^2}$, было дано американским математиком И. Нивеном в 1947 году [2].

2. Доказательство иррациональности вещественного числа *e* методом Фурье. Среди различных доказательств иррациональности вещественных чисел стоит так же отметить доказательство иррациональности числа *e*, данное французским математиком Фурье в 1815 году [3,4,5,6], излагаемое обычно в учебниках по математическому анализу [7]. Метод, который он использовал, мы будем называть *методом Фурье*.

Фурье исходил из известного ряда [7]

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots \tag{2}$$

Если допустить противное и считать, что число *e* - рациональное число, то

$$e = \frac{p}{q}, \tag{3}$$

где целые положительные числа *p* и *q* образуют несократимую дробь. Обозначим через α_q и β_q, соответственно, частичную сумму и остаток ряда:

$$\alpha_q = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{q!},$$

$$\beta_q = \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \frac{1}{(q+3)!} + \ldots .$$

Тогда

$$\beta_q = e - \alpha_q = \frac{p}{q} - \alpha_q. \tag{4}$$

Умножив обе части равенства (4) на $q!$, получим, что

$q!e = p(q-1)!$ - целое число,

$q!\alpha_q = q! + q! + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot q + \ldots + q + 1$ - целое число,

$q!\beta_q = q!e - q!\alpha_q$ - целое число как разность двух целых чисел.

Но $q!\beta_q$ не может быть целым, поскольку

$$0 < q!\beta_q = \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots <$$

$$< \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \ldots = \frac{\frac{1}{(q+1)}}{1 - \frac{1}{(q+1)}} = \frac{1}{q}.$$

Так, что $0 < q!\beta_q < \frac{1}{q}$. Отсюда заключаем, что $q!\beta_q$ - правильная дробь. Из полученного противоречия следует, что число e иррационально.

Наконец приведем интересную модификацию метода Фурье, изложенную в [2]. Допустим, что число e рационально, тогда рационально обратное число $e^{-1} = \frac{p}{q}$. Теперь ряд (2) нужно заменить рядом [7]:

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} + \ldots \tag{5}$$

Пусть, как и выше, α_q и β_q - соответственно частичная сумма и остаток ряда:

$$\alpha_q = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^q}{q!},$$

$$\beta_q = (-1)^{q+1}\left(\frac{1}{(q+1)!} - \frac{1}{(q+2)!} + \frac{1}{(q+3)!} - \ldots\right).$$

Тогда

$$\beta_q = e^{-1} - \alpha_q = \frac{p}{q} - \alpha_q . \tag{6}$$

Умножив обе части равенства (6) на $q!$, получим, что:

$q!e^{-1} = p(q-1)!$ - целое число,

$q!\alpha_q = q! - q! + 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot q + \ldots + (-1)^{q-1}q + (-1)^q$ - целое число,

$q!\beta_q = q!e - q!\alpha_q$ - целое число как разность двух целых чисел.

Но $q!\beta_q$ не может быть целым, поскольку как сумма знакочередующегося ряда, $\left|\beta_q\right| < \frac{1}{(q+1)!}$. Следовательно, $0 < \left|q!\beta_q\right| < \frac{1}{q+1}$. Отсюда заключаем, что $q!\beta_q$ - рациональная дробь. Из полученного противоречия следует, что числа e^{-1} и e иррациональны.

3. Нана функция Nana(x) и кека функция Keka(x) вещественного аргумента x. Определим нана функцию $\mathrm{Nana}(x)$ (не путать с нано технологиями) и кека функцию $\mathrm{Keka}(x)$ вещественного аргумента x как сумму функциональных рядов

$$\mathrm{Nana}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^x} . \tag{7}$$

$$\mathrm{Keka}(x) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n!)^x} . \tag{8}$$

Из признака Даламбера [7] следует, что ряды в правых частях формул (7) и (8) сходятся для всех вещественных значений $x > 0$, причем для ряда (8) эта сходимость абсолютная. Из необходимого признака сходимости [7] вытекает расходимость этих рядов для всех вещественных значений $x \le 0$. Таким образом, функции $\mathrm{Nana}(x)$ и $\mathrm{Keka}(x)$ определены для всех значений $x > 0$.

С помощью признака Вейерштрасса [7] несложно установить равномерную сходимость функциональных рядов, определяющих функции $\mathrm{Nana}(x)$ и $\mathrm{Keka}(x)$ на области $x \ge \alpha$, где α - любое фиксированное вещественное число большее нуля. Это вытекает из наличия мажорантного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^{\alpha}}$. Отсюда следует непрерывность функций $\mathrm{Nana}(x)$ и $\mathrm{Keka}(x)$ для всех значений $x > 0$.

Почленным дифференцированием k раз легко найти k-ю производную этих функций

$$\mathrm{Nana}^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^k n!}{(n!)^x} \tag{9}$$

$$\mathrm{Keka}^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^k n!}{(n!)^x} \tag{10}$$

Для оправдания формул (9) и (10) нужно убедиться в равномерной сходимости рядов (9) и (10) для всех $x \ge \alpha$, где α - любое фиксированное вещественное число большее нуля. Эта сходимость вытекает из существования мажорантного ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^k n!}{(n!)^{\alpha}}$. Сходимость последнего ряда следует из признака Даламбера. Действительно, положив $a_n = \frac{\ln^k n!}{(n!)^{\alpha}}$, где $\alpha > 0$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(n+1)!}{\ln n!} \right)^k \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)!}{\ln n!} \right)^k \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} = 1 \cdot 0 = 0.$$

При вычислении использовался предел $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)!}{\ln n!} = 1$, справедливость которого следует из теоремы Штольца [8]. Действительно, положив $x_n = \ln(n+1)!$ и $y_n = \ln n!$, и учитывая, что

$$y_n < y_{n+1} \text{ для } n = 1, 2, 3, \dots, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)! - \ln n!}{\ln n! - \ln(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right) = 1,$$

получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)!}{\ln n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = 1.$$

Таким образом, доказано, что функции $\mathrm{Nana}(x)$ и $\mathrm{Keka}(x)$ на области $x > 0$ бесконечно дифференцируемы.

4. Нана и кека числа. В дальнейшем будем рассматривать функции $\mathrm{Nana}(x)$ и $\mathrm{Keka}(x)$ для натуральных значений аргумента *x*. Значения этих функций при натуральном аргументе $x = k$, $k = 1, 2, 3, \dots$ для краткости будем называть соответственно *k*-м нана числом и *k*-м кека числом. Из формул (2) и (5) следует, что $\mathrm{Nana}(1) = e$ и $\mathrm{Keka}(1) = e^{-1}$.

Докажем оценку величины *k*-го нана числа и *k*-го кека числа.

Теорема 1. Значения нана числа $\mathrm{Nana}(k)$ и кека числа $\mathrm{Keka}(k)$ для каждого $k = 1, 2, 3, \dots$ ограничены интервалами

$$2 + \frac{1}{2^k} < \mathrm{Nana}(k) < 2 + \frac{1}{2^k - 1}, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2^k} - \frac{1}{6^k} < \mathrm{Keka}(k) < \frac{1}{2^k}, \tag{12}$$

Доказательство. Докажем сначала неравенство (11). Оценка сверху следует из неравенства $\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}$. Подставляя его в (7) и полагая $x=k$, $k=1,2,3,\ldots$, получим

$$\mathrm{Nana}(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^k}<1+1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\left(2^k\right)^{n-1}}=\frac{2^{k+1}-1}{2^k-1}.$$

Оценка снизу вытекает из монотонного возрастания частичных сумм сходящегося ряда (7). Тогда, если $S_m=\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{(n!)^k}$ - m-я частичная сумма этого ряда, а $\mathrm{Nana}(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^k}$ – его сумма, то верно неравенство $S_2=1+1+\frac{1}{2^k}<\mathrm{Nana}(k)$. Неравенство (11) доказано.

Неравенство (12) прямо следует из того факта, что ряд (8) знакочередующийся и все частичные суммы с четными номерами больше суммы ряда, то есть $\mathrm{Keka}(k)$, а все частичные суммы с нечетными номерами меньше суммы ряда. Теорема доказана.

Приведем оценки величины первых трех нана и кека чисел

$$2{,}5<\mathrm{Nana}(1)<3,\ \frac{1}{3}<\mathrm{Keka}(1)<\frac{1}{2}$$

$$2{,}25<\mathrm{Nana}(2)<\frac{7}{3},\ \frac{2}{9}<\mathrm{Keka}(4)<\frac{1}{4}$$

$$2{,}125<\mathrm{Nana}(3)<\frac{15}{7},\ \frac{13}{108}<\mathrm{Keka}(3)<\frac{1}{8},$$

и их значения, вычисленные с точностью до 12 значимых цифр

$$\mathrm{Nana}(1)=2{,}718281828459,\ \mathrm{Keka}(1)=0{,}367879441171,$$

$$\mathrm{Nana}(2)=2{,}279585023336,\ \mathrm{Keka}(2)=0{,}223890779141$$

$$\mathrm{Nana}(3)=2{,}129702548983,\ \mathrm{Keka}(3)=0{,}120442132301.$$

При вычислении этих значений была использована оценка остатка ряда $\mathrm{Nana}(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^k}$, доказательство которой приведено в теореме 2. Оценка остатка ряда $\mathrm{Keka}(k)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n!)^k}$ получить несложно

$$\left|\sum_{m=n+1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{(m!)^k}\right|<\frac{1}{((n+1)!)^k}, \qquad (13)$$

так как это знакочередующийся ряд.

Теорема 2. Остаток ряда $\mathrm{Nana}(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^k}$ удовлетворяет неравенству

$$0<\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(m!)^k}<\frac{1}{(n!)^k}\frac{1}{(n+1)^k-1} \qquad (14)$$

Доказательство. Поскольку частичные суммы ряда (7) монотонно возрастают, то его остаток положителен. Отсюда

$$0<\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(m!)^k}=\frac{1}{(n!)^k}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{\left[(n+1)(n+2)...m\right]^k}<\frac{1}{(n!)^k}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^k}=$$

$$=\frac{1}{(n!)^k}\frac{1}{(n+1)^k-1}.$$

Теорема 2 доказана.

5. Иррациональность нана и кека чисел. Докажем теперь, все нана числа и кека числа иррациональны, применяя изложенный в пункте 2 способ Фурье.

Теорема 3. Нана числа $\mathrm{Nana}(k)$ и кека числа $\mathrm{Keka}(k)$ иррациональны для всех $k=1, 2, 3, ...$.

Доказательство. Докажем сначала иррациональность чисел $\mathrm{Nana}(k)$. Предположим противное, пусть для некоторого натурального значения k число $\mathrm{Nana}(k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^k}$ рационально. Тогда найдутся такое целое число p и такое натуральное число q, что дробь $p/q = \mathrm{Nana}(k)$ будет несократимой. Обозначим первые q членов ряда $\mathrm{Nana}(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^k}$ через $\alpha_q(k)$:

$$\alpha_q(k) = \sum_{n=1}^{q} \frac{1}{(n!)^k},$$

а его остаток через $\beta_q(x)$:

$$\beta_q(k) = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^k} = \frac{1}{((q+1)!)^k} + \frac{1}{((q+2)!)^k} + \dots .$$

Тогда

$$\beta_q(k) = \frac{p}{q} - \alpha_q(k). \tag{15}$$

Используя из теоремы 2 оценку (14) остатка $\beta_q(x)$ ряда $\mathrm{Nana}(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^k}$, получим, что

$$0 < \left|(q!)^k \beta_q(k)\right| = \left|(q!)^k \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^k}\right| < \frac{1}{(q+1)^k - 1} < 1. \tag{16}$$

Тогда число $(q!)^k \beta_q(k)$ не может быть целым, так как в интервале $(0,1)$ целых чисел нет.

Умножив обе части равенства (15) на $(q!)^k$, получим, что

$$(q!)^k \frac{p}{q} = (q!)^{k-1}(q-1)!,$$

$$(q!)^k \alpha_q(k) = \sum_{n=1}^{q!} (-1)^{n-1} \left(\frac{q!}{n}\right)^k = \sum_{n=1}^{q!} (-1)^{n-1} \left(1 \cdot 2 \cdot \ldots (n-1)(n+1) \ldots q\right)^k .$$

Следовательно, $(q!)^k \frac{p}{q}$ и $(q!)^k \alpha_q(k)$ - целые числа. Поэтому число

$$(q!)^k \beta_q(k) = (q!)^k \frac{p}{q} - (q!)^k \alpha_q(k)$$

как разность целых чисел так же будет целым числом. Таким образом, число $(q!)^k \beta_q(k)$ одновременно целое и нецелое число. Из полученного противоречия следует, что числа $\mathrm{Nana}(k)$ иррациональны.

Иррациональность чисел $\mathrm{Keka}(k)$ доказывается аналогично. Теперь

$$\alpha_q(k) = \sum_{n=2}^{q} (-1)^n \frac{1}{(n!)^k}$$

и

$$\beta_q(k) = \sum_{n=q+1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^k} = (-1)^{q+1} \frac{1}{((q+1)!)^k} + (-1)^{q+2} \frac{1}{((q+2)!)^k} + \dots .$$

Оценка (16) меняется на

$$0 < \left|(q!)^k \beta_q(k)\right| = \left|(q!)^k \sum_{n=q+1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^k}\right| < \frac{q^k}{(q+1)^k} < 1 . \tag{17}$$

Все остальные вводы остаются в силе. Теорема 3 доказана.

Заключение. Рассмотренные в работе нана функция $\mathrm{Nana}(x)$ и кека функция $\mathrm{Keka}(x)$ являются ближайшими аналогами известных функций $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ (дзета-функция Римана) и $\eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x}$ (эта-функция Дирихле). Для функций $\mathrm{Nana}(x)$ и $\mathrm{Keka}(x)$ удалось получить оценки их величины, доказать, что они бесконечно дифференцируемы, и наконец, доказать иррациональность их значений при любом натуральном аргументе. В тоже время вопрос об иррациональности значений дзета-функции нечетного натурального аргумента далек от завершения. Доказана иррациональность всех чисел $\zeta(2k)$ четного натурально аргумента. Среди чисел $\zeta(2k-1)$ доказана иррациональность только числа Апери $\zeta(3)$.

Остались ещё не решенные и неисследованные проблемы. Например, трансцендентны ли нана и кека числа? Чему равны нули функции $\mathrm{Nana}(x)$ и

$\text{Keka}(x)$? Нули этих функций, очевидно, могут быть только комплексными. Понятно, что функции $\text{Nana}(x)$ и $\text{Keka}(x)$ аналитические в области $\text{Re}\,x > 0$. Поэтому интересно рассмотреть аналитическое продолжение этих функций на комплексную плоскость в не области $\text{Re}\,x > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудио Ф. О квадратуре круга. 3-е изд. М.-Л.: ОНТИ, 1936. – 237 с.

2. Бухштаб А.А. Теория чисел. – М.: Просвещение, 1966. – 384 с.

3. Дринфельд Г.И. Трансцендентность чисел π и e. – Харьков: Изд. ХГУ,1952.– 76 с.

4. Михелович Ш.Х. Теория чисел. – М.: Высшая школа. 1967. – 337 с.

5. Жуков А.В. Вездесущее число «пи». – М.:Едиториал УРСС, 2004.–216 с.

6. Нестеренко Ю.В. Теория чисел. – М.: Академия, 2008. – 272 с.

7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. Т.2. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1969. – 800 с.

8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. Т.1. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1969. – 608 с.

REFERENCES

1. Rudio F. O kvadrature kruga. 3-e izd. – M. - L.:, ONTI, 1936. – 237 p.

2. Buhshtab A.A. Teorija chisel. – M.: Prosveshhenie, 1966. – 384 s.

3. Drinfel'd G.I. Transcendentnost' chisel π i e. -Har'kov: Izd. HGU, 1952.76 s.

4. Mihelovich Sh.H. Teorija chisel. – M.: Vysshaja shkola. 1967. – 337 s.

5. Zhukov A.V. Vezdesushhee chislo «pi». – M.: Editorial URSS, 2004.-216 s.

6. Nesterenko Ju.V. Teorija chisel. – M.: Akademija, 2008. – 272 s.

7. Fihtengol'c G.M. Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija. V 3-h tomah. T.2. – M.: Nauka, GRFML, 1969. – 800 s.

8. Fihtengol'c G.M. Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija. V 3-h tomah. T.1. – M.: Nauka, GRFML, 1969. – 608 s.

ABOUT IRRATIONALITY OF VALUES OF NANA AND KEKA FUNCTIONS OF A NATURAL ARGUMENT

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

Two new functions - nana and keka functions of one real variable were considered. It is shown that these functions are defined for positive values of the argument. Their infinite differentiability is proved. The values of these functions of a natural argument named nana and keka functions. The irrationality of these numbers is proved by the Fourier method. Values of the first three numbers are calculated up to the 12th decimal digit.
Key words: irrational number, Fourier method, nana function, keka function, nana number, keka number.