УДК 517.944

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ В МОДЕЛЯХ МАРГЕРРА-ВЛАСОВА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

КОЛПАКОВА Е.В.

Новороссийский политехнический институт
353900, Российская Федерация, г. Новороссийск, ул. К.Маркса, 20, тел.: (8617) 61-29-71
электронная почта: **nbkstu@nbkstu.org.ru**

В настоящей статье доказана теорема единственности обобщенных решений начально-краевой задачи модели Маргерра-Власова колебаний пологих оболочек с малой инерцией продольных перемещений точек срединной поверхности оболочки из материалов с внутренним трением.

Ключевые слова: обобщенное решение, шарнирное закрепление.

Рассматриваемые модели были предложены К. Маргерром и В.З. Власовым и получили свое развитие в основополагающих работах И.И. Воровича [1]. В них было дано определение обобщенного решения начально-краевой задачи модели при условии жесткого закрепления края оболочки, проектирующейся на ограниченную область, и была доказана теорема их существования. Теорема же единственности в условиях теоремы существования была доказана позднее В.И. Седенко [2]. Автором исследуются модели Маргерра-Власова в существенно более сложном случае шарнирного закрепления края оболочки. Значимые результаты для случая ограниченной области получены сравнительно недавно (см. например [3]–[5]). В данной статье впервые доказывается единственность обобщенных решений модели Маргерра-Власова колебаний пологих оболочек, проектирующихся на неограниченную область, при шарнирном закреплении края с дифференциальными свойствами решений, указанными в теореме существования [3].

Пусть оболочка проектируется на плоскую область Ω с границей Γ, являющуюся дополнением в R^2 конечного объединения ограниченных односвязных областей. Поперечное перемещение w точек срединной поверхности оболочки удовлетворяет следующему уравнению

$$\rho h w_{tt} - \gamma \Delta w_{tt} + D\Delta^2 w + \delta \Delta^2 w_t = Z + \left(N_1 w_{x_1}\right)_{x_2} + \left(N_{12} w_{x_1}\right)_{x_2} + \left(N_2 w_{x_2}\right)_{x_2} + \\ + \left(N_{12} w_{x_2}\right)_{x_1} - N_1 k_1 - N_2 k_2 \tag{1}$$

с краевыми условиями шарнирного закрепления

$$w\big|_{\Gamma} = \left(\frac{d^2 w}{dn^2} - \mu\chi \frac{dw}{dn}\right)\Big|_{\Gamma} = 0, \quad w\big|_{|x| \to \infty} = 0. \tag{2}$$

Продольные перемещения u и v точек срединной поверхности оболочки удовлетворяют следующей начально-краевой задаче

$$\Delta u + \frac{1+\mu}{1-\mu}\theta_{x_1} = -\left(\frac{2}{1+\mu}\Big[(k_1 w)_{x_1} + w_{x_1 w_1} w_{x_1} + + \mu (k_2 w)_{x_1} + \mu\, w_{x_1 x_2} w_{x_2}\Big] + \right.$$

$$\left. + w_{x_1 x_2} w_{x_2} + w_{x_1} w_{x_2 x_2} + X\right),\ \Delta v + \frac{1+\mu}{1-\mu}\theta_{x_2} = -\left(\frac{2}{1-\mu}\Big[(k_2 w)_{x_2} + w_{x_2 x_2} w_{x_2} + \right. \tag{3}$$

$$\left. + \mu (k_1 w)_{x_2} + \mu w_{x_1 x_2} w_{x_1}\Big] + w_{x_1 x_2} w_{x_1} + + w_{x_2} w_{x_1 x_1} + Y\right),\ u\big|_{\Gamma} = v\big|_{\Gamma} = 0.$$

где $\theta = u_{x_1} + v_{x_2}$, X, Y — продольные составляющие внешних сил, действующих на оболочку. Начальные условия имеют вид

$$w(x,0) = w_0(x),\ w_t(x,0) = w_1(x),\ x \in \Omega\ . \tag{4}$$

Определение и существование обобщенных решений для таких начально-краевых задач было показано в [3]. Поясним здесь только метод доказательства теоремы существования обобщенных решений, поясняющий дальнейшие предположения в доказательстве теоремы единственности. Обозначим Ω_k — последовательность ограниченных областей таких, что $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$, $\underset{k=1}{\overset{\infty}{U}} \Omega_k = \Omega$, при этом граница $\partial\Omega_k = \Gamma_k \bigcup \Gamma$, где Γ_k — бесконечно дифференцируема. Полностью аналогично $\widetilde{H}_2^2(\Omega)$ в [4] определяем пространства $\widetilde{H}_2^2(\Omega_k)$. Затем в каждой ограниченной области Ω_k ставим задачу на собственные значения для бигармонического оператора со смешанными краевыми условиями:

$$\Delta^2 \xi^k = \lambda \xi^k,\ \xi^k\big|_{\Gamma_k} = \frac{d\xi^k}{dn}\Big|_{\Gamma_k} = 0,\ \xi^k\big|_{\Gamma} = \left(\frac{d^2 \xi^k}{dn^2} - \mu\chi \frac{d\xi^k}{dn}\right)_{\Gamma} = 0. \tag{5}$$

Согласно [5] задача (5) имеет вещественный дискретный спектр $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_l \le \ldots$ из счетного числа стремящихся к бесконечности положительных собственных значений, каждому из которых соответствует лишь конечное число линейно независимых собственных функций ξ_l^k, образующих полную ортонормированную систему в $L_2(\Omega_k)$ и полную ортогональную систему в $\widetilde{H}_2^2(\Omega_k)$. В каждой области Ω_k строим приближения Бубнова-Галеркина в виде сумм

$$w^{m_k}(x,t) = \sum_{j=1}^{m_k} a_j^{m_k}(t)\xi_j^k(x),$$

где функции времени $a_j^{m_k}(t)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка, полученной с помощью условий ортонормированности собственных функций в $L_2(\Omega_k)$ из системы уравнений, приближающей данную краевую задачу. С помощью стандартных действий, опирающихся на соображения слабой компактности, приходим к существованию обобщенного решения.

Теорема 1. Пусть граница области Ω $\Gamma \in C^3$ и имеет ограниченные четвертые производные. Пусть $w_0 \in \widetilde{H}_2^2(\Omega)$, $w_1 \in L_2(\Omega)$, $X = X_{1x_1} + X_{2x_2}$, $Y = Y_{1x_1} + Y_{2x_2}$, $Z = Z_0 + Z_{1x_1} + Z_{2x_2} + \Delta^2 Z_3$, где $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in L_{2,\infty}(\Omega \times [0,t_f])$, $Z_0 \in L_{1,2}(\Omega \times [0,t_f])$, $Z_1, Z_2 \in L_2(\Omega \times [0,t_f])$, $Z_3 \in L_2([0,t_f], \widetilde{H}_2^2(\Omega))$. Тогда при $\delta > 0$ существуют обобщенные решения w, u, v начально-краевой задачи (1) – (4), удовлетворяющие следующим условиям:

$$w \in L_{2,\infty}^{2,0}(\Omega \times [0,t_f]), w \in L_{2,2}^{2,1}(\Omega \times [0,t_f]) \cap L_{2,\infty}^{1,1}(\Omega \times [0,t_f]), u,\ v \in L_\infty\left([0,t_f], \overset{\circ}{H}{}_2^1(\Omega)\right).$$

Для доказательства единственности, как обычно, предполагаем, что в данной неограниченной области Ω существуют два различные обобщенные решения w^1, u^1, v^1 и w^2, u^2, v^2 исходной начально-краевой задачи (1) – (4) с одинаковыми данными. Тогда найдется такой номер k_0, что при $k \ge k_0$ во всех ограниченных областях Ω_k нарушается единственность. В любой такой области Ω_k для разности решений $w^0 = w^1 - w^2$ выводится интегральное соотношение

$$\left\|w^0(t)\right\|^2_{L_2(\Omega_k)} + \gamma\left\|w^0(t)\right\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1_2(\Omega_k)} + D\left\|\int_0^t w^0(s)ds\right\|^2_{\widetilde{H}^2_2(\Omega_k)} + \delta\int_0^t \left\|w^0(s)\right\|^2_{\widetilde{H}^2_2(\Omega_k)} ds =$$

$$= -2\int_0^t \Bigg(\left(\int_0^s \left(\left(N_1^1 - N_1^2\right)k_1 + \left(N_2^1 - N_2^2\right)k_2\right)d\tau, w^0(s)\right)_{L_2(\Omega_k)} +$$

$$+ \left(\int_0^s \left(\left(N_1^1 - N_1^2\right)w^1_{x_1} + N_1^2 w^0_{x_1} + \left(N_{12}^1 - N_{12}^2\right)w^1_{x_2} + N_{12}^2 w^0_{x_2}\right)d\tau, w^0_{x_1}(s)\right)_{L_2(\Omega_k)} + \tag{6}$$

$$+ \left(\int_0^s \left(\left(N_{12}^1 - N_{12}^2\right)w^1_{x_1} + +N_{12}^2 w^0_{x_1} + \left(N_2^1 - N_2^2\right)w^1_{x_2} + N_2^2 w^0_{x_2}\right)d\tau, w^0_{x_2}(s)\right)_{L_2(\Omega_k)}\Bigg)ds.$$

Обозначим левую часть соотношения (6) $a(t)$. Классифицируя нелинейные слагаемые правой части (6) и вводя обозначения $u^0 = u^1 - u^2$, $v^0 = v^1 - v^2$, получаем следующее утверждение.

Лемма 1. Для всех $t \in [0, t_f]$ имеет место следующее неравенство

$$a(t) \le C_1 \sum_{n=1}^{8} A_n(t),$$

где константа C_1 не зависит от времени t и от k, при

$$A_1(t) = \sum_{i,j=1}^{2}\left|\int_0^t \left(k_i k_j \int_0^s w^0(\tau)d\tau, w^0(s)\right)_{L_2(\Omega_k)} ds\right|,$$

$$A_2(t) = \sum_{i,j=1}^{2}\left|\int_0^t \left(k_i \int_0^s u^0_{x_j}(\tau)d\tau, w^0(s)\right)_{L_2(\Omega_k)} ds\right| + \left|\int_0^t \left(k_i \int_0^s v^0_{x_j}(\tau)d\tau, w^0(s)\right)_{L_2(\Omega_k)} ds\right|,$$

$$A_3(t) = \sum_{\substack{i,j,\\ r,l=1}}^{2}\left|\int_0^t \left(k_i \int_0^s w^0_{x_j}(\tau) w^r_{x_l}(\tau)d\tau, w^0(s)\right)_{L_2(\Omega_k)} ds\right|,$$

$$A_4(t) = \sum_{\substack{i,j,\\ r,l=1}}^{2}\left|\int_0^t \left(k_i \int_0^s w^0(\tau) w^r_{x_j}(\tau)d\tau, w^0_{x_l}(s)\right)_{L_2(\Omega_k)} ds\right|,$$

$$A_5(t)=\sum_{\substack{i,j,\\ r,l=1}}^{2}\left|\int_0^t\left(k_i\int_0^s w^0_{x_j}(\tau)w^r(\tau)d\tau, w^0_{x_l}(s)\right)_{L_2(\Omega_k)}ds\right|,$$

$$A_6(t)=\sum_{\substack{i,j,\\ r,l=1}}^{2}\left|\int_0^t\left(\int_0^s u^0_{x_i}(\tau)w^j_{x_r}(\tau)d\tau, w^0_{x_l}(s)\right)_{L_2(\Omega_k)}ds\right|+\left|\int_0^t\left(\int_0^s v^0_{x_i}(\tau)w^j_{x_r}(\tau)d\tau, w^0_{x_l}(s)\right)_{L_2(\Omega_k)}ds\right|$$

,

$$A_7(t)=\sum_{\substack{i,j,\\ r,l=1}}^{2}\left|\int_0^t\left(\int_0^s u^0_{x_j}(\tau)w^0_{x_r}(\tau)d\tau, w^0_{x_l}(s)\right)_{L_2(\Omega_k)}ds\right|+\left|\int_0^t\left(\int_0^s v^0_{x_j}(\tau)w^0_{x_r}(\tau)d\tau, w^0_{x_l}(s)\right)_{L_2(\Omega_k)}ds\right|$$

,

$$A_8(t)=\sum_{\substack{i,j,\\ r,l,\\ m,z=1}}^{2}\left|\int_0^t\left(\int_0^s w^0_{x_i}w^j_{x_r}w^l_{x_m}d\tau, w^0_{x_z}(s)\right)_{L_2(\Omega_k)}ds\right|.$$

Доказательство леммы непосредственно следует из вида правой части (6).

Затем получены оценки всех слагаемых $A_n(t)$ способами, аналогичными использованными в [2].

Лемма 2. Для всех $t\in[0,t_f]$ и всех $\delta>0$ имеет место неравенство

$$A_1(t)+A_2(t)\le C_2\int_0^t a(\tau)\,d\tau,$$

где константа C_2 не зависит от t и от k.

Доказательство. Сначала оценим $A_1(t)$. Применяя неравенства Гельдера и Коши-Буняковского и учитывая определение $a(t)$, получаем

$$A_1(t)\le C_3\int_0^t\left\|\int_0^s w^0(\tau)d\tau\right\|_{L_2(\Omega_k)}\left\|w^0(s)\right\|_{L_2(\Omega_k)}ds\le$$

$$\le C_4\int_0^t\left(\int_0^s\left\|w^0(\tau)\right\|^2_{L_2(\Omega_k)}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left\|w^0(s)\right\|_{L_2(\Omega_k)}ds\le C_5\int_0^t\left\|w^0(\tau)\right\|^2_{L_2(\Omega_k)}d\tau\le C_5\int_0^t a(\tau)d\tau$$

Оценка $A_1(t)$ доказана. Для доказательства оценки $A_2(t)$ выводим следующее неравенство, верное в ограниченной области согласно [2]:

$$\left\|u^0(t)\right\|_{\overset{\circ}{H}{}^1_2(\Omega_k)}+\left\|v^0(t)\right\|_{\overset{\circ}{H}{}^1_2(\Omega_k)}\le C_6\left\|w^0(t)\right\|^2_{\widetilde{H}^2_2(\Omega_k)}. \qquad (7)$$

Поступая так же как при оценке $A_1(t)$ и применяя (7), получим

$$\left|\int_0^t \left(k_i\int_0^s u^0_{x_j}(\tau)d\tau, w^0(s)\right)_{L_2(\Omega_k)} ds\right| \le C_7\int_0^t \left\|\int_0^s u^0_{x_j}(\tau)d\tau\right\|_{L_2(\Omega_k)} \left\|w^0(s)\right\|_{L_2(\Omega_k)} ds \le$$
$$\le C_8\left(\int_0^t\int_0^s \left\|u^0(\tau)\right\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1_2(\Omega_k)} d\tau ds + \int_0^t \left\|w^0(s)\right\|^2_{L_2(\Omega_k)} ds\right) \le \tag{8}$$
$$\le C_9\int_0^t \left(\int_0^s \left\|w^0(\tau)\right\|^2_{\widetilde{H}{}^2_2(\Omega_k)} d\tau + \left\|w^0(s)\right\|^2_{L_2(\Omega_k)}\right) ds \le C_{10}\int_0^t a(\tau)\,d\tau$$

Слагаемые $A_2(t)$, в которых вместо u^0 участвуют v^0 , оцениваем аналогично (8). Лемма доказана.

Лемма 3. Для всех $t \in [0, t_f]$, $\varepsilon > 0$ и всех $\delta \ge 0$ выполняется неравенство

$$A_3(t) + A_4(t) + A_5(t) + A_6(t) + A_7(t) + A_8(t) \le \varepsilon a(t) + C_{11}\left(\varepsilon^{-1} + 1\right)\int_0^t a(\tau)\,d\tau,$$

где константа C_{11} не зависит от t и от k .

Доказательство. Сначала оценим величину $A_3(t)$.Для этого слагаемые $A_3(t)$ проинтегрируем по частям по переменному s . Имеем

$$\int_0^t \left(k_i\int_0^s w^0_{x_j}(\tau)w^r_{x_l}(\tau)d\tau, w^0(s)\right)_{L_2(\Omega_k)} ds = \left(k_i\int_0^t w^0_{x_j}(\tau)w^r_{x_l}(\tau)d\tau, \int_0^t w^0(\tau)d\tau\right)_{L_2(\Omega_k)} -$$
$$-\int_0^t \left(k_i w^0_{x_j}(s)w^r_{x_l}(s), \int_0^s w^0(\tau)\,d\tau\right)_{L_2(\Omega_k)} \tag{9}$$

Теперь проинтегрируем по частям по переменному x первое слагаемое (9) с учетом однородных краевых условий (2), получаем

$$-\left(k_i\int_0^t w^0_{x_j}(\tau)w^r_{x_l}(\tau)d\tau, \int_0^t w^0(\tau)d\tau\right)_{L_2(\Omega_k)} = \left(k_{ix_j}\int_0^t w^0(\tau)w^r_{x_l}(\tau)d\tau, \int_0^t w^0(\tau)d\tau\right)_{L_2(\Omega_k)} +$$
$$+\left(k_i\int_0^t w^0(\tau)w^r_{x_l x_j}(\tau)d\tau, \int_0^t w^0(\tau)d\tau\right)_{L_2(\Omega_k)} + \left(k_i\int_0^t w^0(\tau)w^r_{x_l}(\tau)d\tau, \int_0^t w^0_{x_j}(\tau)d\tau\right)_{L_2(\Omega_k)}. \tag{10}$$

Оценим все слагаемые в правой части (10) отдельно. Согласно неравенствам Гельдера, Коши-Буняковского и Юнга, дифференциальным свойствам обобщенных решений w^j , указанным в теореме существования, а, также, учитывая ограниченные вложения $\widetilde{H}_2^2(\Omega_k)$ в $H_2^2(\Omega_k)$ и $H_2^2(\Omega_k)$ в $L_\infty(\Omega_k)$, для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\left|\left(k_{ix_j}\int_0^t w^0(\tau)\,w_{x_l}^r(\tau)d\tau,\int_0^t w^0(\tau)d\tau\right)_{L_2(\Omega_k)}\right| \le C_{12}\left(\int_0^t \left\|w^0(\tau)\right\|_{L_2(\Omega_k)}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\int_0^t w^0(\tau)d\tau\right\|_{\widetilde{H}_2^2(\Omega_k)} \le \le \varepsilon a(t) + C_{13}\varepsilon^{-1}\int_0^t a(\tau)d\tau \quad (11)$$

Повторяя те же рассуждения, что и при выводе (11), получаем оценку второго слагаемого соотношения (10):

$$\left|\left(k_i\int_0^t w^0(\tau)w_{x_jx_l}^r(\tau)d\tau,\int_0^t w^0(\tau)d\tau\right)_{L_2(\Omega_k)}\right| \le C_{14}\int_0^t\left(\left\|w^0(s)\right\|_{L_2(\Omega_k)}^2 + \left\|\int_0^s w^0(s)ds\right\|_{\widetilde{H}_2^2(\Omega_k)}^2\right)ds \le \le C_{15}\int_0^t a(\tau)d\tau \quad (12)$$

Наконец, оценим последнее слагаемое правой части (10). Используем дважды неравенство Гельдера, затем неравенство Юнга и ограниченные вложения $H_2^1(\Omega_k)$ в $L_3(\Omega_k)$ и в $L_6(\Omega_k)$, тогда имеем

$$\left|\left(k_i\int_0^t w^0(\tau)w_{x_l}^r(\tau)d\tau,\int_0^t w_{x_j}^0(\tau)d\tau\right)_{L_2(\Omega_k)}\right| \le C_{16}\left\|w^0\right\|_{L_2\left(\Omega_k\times[0,t_f]\right)}\left\|\int_0^t w^0(\tau)d\tau\right\|_{\widetilde{H}_2^2(\Omega_k)} \le \le C_{17}\int_0^t a(\tau)d\tau \quad (13)$$

При оценивании второго слагаемого правой части (9) действуем так же, как и при выводе соотношений (11)–(13). Окончательно получаем оценку:

$$A_3(t) \le \varepsilon\, a(t) + C_{18}\left(1+\varepsilon^{-1}\right)\int_0^t a(\tau)\,d\tau.$$

Оценка $A_4(t), A_5(t), A_6(t), A_7(t), A_8(t)$ проводится почти аналогично оценке $A_3(t)$. Лемма доказана.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 обобщенные решения w, u, v начально-краевой задачи (1) – (4) единственны.

Доказательство. Из лемм 1 – 3 для достаточно малого $\varepsilon > 0$ следует, что

$$a(t) \le C_{19} \int_0^t a(\tau)\, d\tau\,, \qquad (14)$$

где по определению $a(t) \ge 0$. Но тогда, применяя к (14) оценку решения неравенства Гронуола, имеем равенство $a(t) \equiv 0$. А значит $w^1 \equiv w^2$, $u^1 \equiv u^2$, $v^1 \equiv v^2$ в области Ω_k. Учитывая, наконец, произвольность номера k, получаем совпадение обобщенных решений исходной начально-краевой задачи с одинаковыми данными во всей области Ω. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ворович И.И.** О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебания пологих оболочек // Известия АН СССР. Сер. Мат. 1957. Т.21. №6. С. 747–784.

2. **Седенко В.И.** Единственность обобщенного решения начально–краевой задачи нелинейной теории колебаний пологих оболочек // ДАН СССР. 1991. Т. 316. №6. С. 1319–1322.

3. **Колпакова Е.В.** Существование обобщенных решений моделей Маргерра-Власова колебаний пологих оболочек с шарнирным закреплением края в неограниченной области // Вестник ИжГТУ. 2010. № 1(45). С. 144–146.

4. **Колпакова Е.В., Седенко В.И.** Обобщенный спектр бигармонического оператора в задаче с краевыми условиями шарнирного закрепления // Вестник СевКавГТИ.–2012. С. 29-32.

5. **Колпакова Е.В., Давтян Д.Б., Седенко В.И.** Задача на собственные значения для бигармонического оператора с краевыми условиями смешанного закрепления края оболочки // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2008. Т. 3. С. 13–15.

REFERENCES

1. **Vorovich I.I.** Izvestija AN USSR Ser. Mat. 1957. T.21. №6. P. 747–784. (On some direct methods in the theory of nonlinear oscillations of shallow shells).

2. **Sedenko V.I.** // DAN USSR. 1991. T. 316. №6. P. 1319–1322. (Uniqueness of the generalized solution of the initial-boundary value problems of nonlinear oscillation theory of shallow shells).

3. **Kolpakova E.V.** Vestnik IzhGTU. 2010. № 1(45). P. 144–146. (Existence of generalized solutions models Marguerre-Vlasov vibrations of shallow shells with hinged edges in an unbounded domain).

4. **Kolpakova E.V.** Vestnik SevKavGTI. 2012. P. 29-32. (Generalized spectrum of the biharmonic operator in the problem with boundary conditions of simply supported).

5**.** **Kolpakova E.V.** Izvestija VUZov. Severo-Kavkazskij region. Estestestvennye nauki. 2008. T. 3. P. 13–15. (The eigenvalue problem for the biharmonic operator with mixed boundary conditions fixing the shell edge).

AN UNIQUENESS IN THE MARGUERRE-VLASOV'S OSCILLATION MODELS IN THE UNBOUNDED DOMAIN

KOLPAKOVA E.V.

Novorossiysk Polytechnic Institute
20, Karl Marx str., Novorossiysk, Russian Federation, 353900; ph.: (8617) 61-29-71
e-mail: nbkstu@nbkstu.org.ru

This article represents the theorem of uniqueness for generalized solutions of the Marguerre-Vlasov's oscillation model of the sloping casings with the weak inertia of the longitudinal transfers of the casing's with the weak inertia of the longitudinal transfers of the casing's middle surface points from the materials with inner friction.
Keywords: weak solution, hinge-fixation.