512.8

ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.М. КИРЬЯКОВ

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2
электронная почта: kiram44@mail.ru

Векторное произведение в n-мерном пространстве представлено в виде определителя, используя свойства которого решается задача ортогонализации векторов и построения взаимного (дуального) базиса.

Ключевые слова: векторное произведение, базис, вектор, ортогонализация.

Обобщением векторного произведения на n-мерное Евклидово пространство [1, с.251] является произведение n-1 векторов, которое может быть представлено в виде определителя n-го порядка, в первой строке которого размещён ортонормированный базис $\overline{e}_k$, а остальные строки составляют проекции произвольных линейно независимых векторов $\overline{a}_k$ в этом базисе. Всего (n-1) вектор:

$$\det \left\| \begin{matrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \dots & \overline{e}_n \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & .. & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\| = \sum_{k=1}^{n} \overline{e}_k A1_{1k} = \overline{c}_1 , \qquad (1)$$

где $\overline{a}_k$, k=2,3,…n - линейно независимые векторы;

$A1_{1k}$- алгебраические дополнения к элементам первой строки определителя.

Выполняется основное свойство этой операции с векторами [2] – ортогональность векторам (линейной оболочке) $\overline{a}_k$, k=2,3,…n . Этот факт легко проверяется, т.к. скалярное произведение $\overline{c}_1\overline{a}_m = \sum_{k=1}^{n} a_{mk} A1_{1k} = 0$. Здесь сумма - определитель, у которого в первой строке стоят элементы m-й строки.

Определитель с двумя равными строками равен нулю. Это и означает, что полученный вектор $\overline{c}_1$ - ортогонален остальным векторам.

1. ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ ВЕКТОРОВ.

Процесс ортогонализации n линейно независимых векторов в n- мерном пространстве [1] основан на вычитании из (k+1)-го вектора (k<n) проекции на линейную оболочку уже полученных k ортонормированных векторов. В результате, после выполнения (n-1) раз вычислений с нормировкой на каждом шаге, из системы произвольно заданных векторов, может быть получена ортонормированная система из n векторов. Та же задача может быть решена по-другому, используя выражение (1), позволяющее получить вектор $\overline{c}_1$ - ортогональный остальным (n-1) векторам. Получив первый вектор, на следующем шаге заменяется любая строка определителя на элементы этого вектора $\overline{c}_1$. Раскрыв снова определитель, получим ещё один вектор $\overline{c}_2$, ортогональный всем векторам $\overline{a}_k$, k=3,4,…n (в том числе и

вектору $\overline{c}_1$, полученному на предыдущем шаге), проекции которых являются строками определителя:

$$\det \left\| \begin{matrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \ldots & \overline{e}_n \\ c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix} \right\| = \sum_{k=1}^{n} \overline{e}_k A2_{1k} = \overline{c}_2 .$$

Этот вектор принадлежит подпространству, линейной оболочкой которого являются выбранные векторы $\overline{a}_k$, k=2,3,…n .

На следующем шаге уже две строки могут быть представлены взаимно-ортогональными векторами $\overline{c}_1$ и $\overline{c}_2$. Повторяя этот процесс ещё (n-2) раз, получаем систему n взаимно-ортогональных векторов. Чтобы нормировать полученные векторы, достаточно разделить каждый на его модуль (длину).

Для случая n=3

$$\overline{c}_1 = [\overline{a}_2, \overline{a}_3];$$

$$\overline{c}_2 = [\overline{c}_1, \overline{a}_3] = [[\overline{a}_2, \overline{a}_3], \overline{a}_2];$$

$$\overline{c}_3 = \overline{a}_3 .$$

Векторы $\overline{c}_k$, k=1,2,3 взаимно ортогональные.

2. ПОСТРОЕНИЕ ВЗАИМНОГО (ДУАЛЬНОГО) БАЗИСА.

Векторы $\overline{a}_k$ k=1,2,…n заданы в ортонормированном базисе $\overline{e}_k$ и определяют некоторый косоугольный базис. Построение взаимного базиса [2] $\overline{a}^k$ для n>3 можно выполнить с помощью введённого векторного произведения (n-1) вектора. В определителе, определяющем объём n-мерного параллелепипеда,

$$\det \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} = V$$

заменить k-ю строку на базисный вектор $\overline{e}_k$. Полученный вектор

$$\det \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & & & \\ \overline{e}_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \overline{e}_n \, .. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} = \overline{d}^k$$

или

$$\overline{d}^k = \sum_{i=1}^{n} A1_{ki} \overline{e}_i \quad ,$$

будет ортогонален всем векторам первого базиса кроме k-го. Нормировка выполняется из условия равенства единице скалярного произведения взаимных векторов:

$$\overline{a}^{k} = m\,\overline{d}^{k} = \frac{\overline{d}^{k}}{\overline{d}^{k}\,\overline{a}_{k}} = \frac{\overline{d}^{k}}{V}$$

или

$$\overline{a}^{k}\,\overline{a}_{k} = m\,\overline{d}^{k}\,\overline{a}_{k} = mV = 1\,.$$

3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ .

Рассмотрим случай, когда строки определителя представляют расширенную матрицу системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\det \begin{Vmatrix} \overline{e}_{1} & \overline{e}_{2} & \dots & \overline{e}_{n+1} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n+1} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn+1} \end{Vmatrix} = \sum_{k=1}^{n+1} \overline{e}_{k}\, A1_{1k} = \overline{c}$$

где $a_{k,n+1} = b_{k}$ - коэффициенты правой части.

Разделив вектор $\overline{c}$ на $\Delta = -A1_{1n+1}$ (главный определитель расширенной матрицы), обозначим проекции полученного вектора $\overline{x}$:

$$x_{k} = -A1_{1k} / A1_{1n+1}\,.$$

$$\left(\overline{x} = \sum_{k=1}^{n} x_{k}\overline{e}_{k} - \overline{e}_{n+1}\right).$$

Скалярным умножением вектора $\overline{x}$ на любую вектор-строку

$$\overline{a}_{k} = \sum_{i=1}^{n+1} a_{k,i}\overline{e}_{k}\,,$$

получается k-е уравнение системы:

$$(\bar{x},\bar{a}_k)=\sum_{i=1}^{n}a_{k,i}x_i-a_{k,n+1}=0$$

Это и доказывает, что проекции вектора $\overline{x}$ представляют решение СЛАУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра, Москва, Наука-Физматлит, 1999.

2. А.И.Борисенко, И.Е. Тарапов, Векторный анализ и начала тензорного исчисления, «Высшая школа», Москва, 1966.

REFERENCES

1. Il'in V.A., Poznjak Je.G. Linejnaja algebra, Moskva, Nauka-Fizmatlit, 1999.

2. A.I.Borisenko, I.E. Tarapov, Vektornyj analiz i nachala tenzornogo ischislenija, «Vysshaja shkola», Moskva, 1966.

VECTOR PRODUCT IN EUCLIDEAN SPACE

A.M. KIRYACOV

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072
e-mail: kiram44@mail.ru

Vector product the n-measured space is presented as a determinant, using properties of which the task of orthogonalzing of vectors and construction of mutual (dual) base decides.
Keywords: the cross product, basis, vector, orthogonalization.