УДК 517.9+519.3

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ В СХЕМАХ ПРИБЛИЖЕННЫХ РАСЧЕТОВ

А.И. ГАВРИЛОВ, Ф.В. МОСКАЛЕНКО

Кубанский государственный технологический университет
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2

Рассмотрены две области применения метода локального потенциала в качестве основы для нахождения приближенных решений обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики, возникающих при решении технических задач. На конкретных примерах показано, как применять метод для дискретизации задачи в случа сплайн аппроксимации решения и выбора пробных функций – в случае глобальной аппроксимации.
Ключевые слова: численное решение дифференциальных уравнений, вариационный метод дискретизации, пробные функции.

Интегральные вариационные принципы (ИВП) получили широкое распространение при численном решении технических задач, сводящихся к обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям в частных производных математической физики.

В настоящем сообщении рассматриваются два аспекта применения ИВП типа локального потенциала [1], пригодного, в том числе, для решения уравнений в частных производных параболического типа.

Первый аспект связан с дискретизацией задачи, когда схема вычислений является прямым следствием ИВП. В качестве примера рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{d^2F}{dx^2}+F=0 \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$F(0)=1, \qquad \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=0}=0\,. \qquad (2)$$

Перейдем к безразмерной переменной $t=\frac{x}{H}$ и будем аппроксимировать решение на отрезке $t\in[t_i,t_{i+1}]$ кубическим сплайном

$$F_i(t)=a_i+p_it+C_{1i}t^2+C_{2i}t^3\,. \qquad (3)$$

Примем $x_{i+1} - x_i = H$ (шаг аппроксимации). Коэффициент a_i дает значение функции в левой точке интервала $t \in [0,1]$; p_i – значение производной в той же точке. Если найти значения этих величин для правой точки интеграла –

$$a_{i+1} = a_i + p_i + C_{1i} + C_{2i}; \tag{4}$$

$$p_{i+1} = p_i + 2C_{1i} + 3C_{2i}, \tag{5}$$

то можно последовательно повторить вычисления для одного и того же интервала $t \in [0,1]$, заменяя a_i на a_{i+1} и p_i на p_{i+1}. Каждое вычисление соответствует сдвигу по аргументу x вперед на H.

Для замыкания вычислительной процедуры необходимо в представлении (3) определить C_{1i} и C_{2i}. Для этого воспользуемся вариационной формулой задачи (1), построенной по методу локального потенциала:

$$\delta \int_0^1 \left(\frac{dF_i}{dt} \frac{dF_i^0}{dt} - HF_i F_i^0 \right) dt - \left(\frac{dF_i^0}{dt} \delta F_i \right) \Bigg|_{t=0}^{t=1} = 0 \tag{6}$$

(величины, помеченные нулем, не варьируются).

Подставляя представление (3) в (6) и варьируя последовательно по C_{2i} и C_{1i}, получаем систему двух уравнений

$$\frac{H^2}{4} a_i + \frac{H^2}{5} p_i + \left(\frac{1}{2} + \frac{H^2}{6} \right) C_{1i} + \left(\frac{6}{5} + \frac{H^2}{7} \right) C_{2i} = 0; \tag{7}$$

$$\frac{H^2}{3} a_i + \frac{H^2}{4} p_i + \left(\frac{2}{3} + \frac{H^2}{5} \right) C_{1i} + \left(\frac{3}{2} + \frac{H^2}{6} \right) C_{2i} = 0, \tag{8}$$

с помощью которой можно исключить коэффициенты C_{1i} и C_{2i}. Тогда на основании представлений (4), (5) приходим к рекуррентным соотношениям

$$a_{i+1} = \left[1 - \frac{H^2}{D} \left(1 + \frac{H^2}{63} \right) \right] a_i + \left[1 - \frac{H^2}{D} \left(\frac{1}{3} + \frac{H^2}{35} \right) \right] p_i; \tag{9}$$

$$p_{i+1} = -\frac{H^2}{D} \left(1 - \frac{2H^2}{21} \right) a_i + \left[1 - \frac{H^2}{D} \left(1 - \frac{H^2}{105} \right) \right] p_i, \tag{10}$$

где
$$D = 2 + \frac{8H^2}{105} + \frac{2H^4}{63}.$$

Поскольку из начальных условий (2) для первого интервала $a_1 = 1$, $p_1 = 0$, то формулы (9)−(11) решают поставленную задачу.

Сопоставление формулы (9) с разложением в ряд Тейлора точного решения задачи $F(x) = \cos(x)$ позволяет сделать вывод о том, что полученная вычислительная схема по значению функции имеет точность порядка H^4.

В таблице 1 проведено сравнение точного решения с приближенным для значений шага $H_1 = \frac{\pi}{12}$ и $H_2 = \frac{\pi}{24}$. Отметим, что шаг можно произвольно изменять на каждом интервале изменения аргумента.

Таблица 1

x	Решение для H_1	Решение для H_2	$cos(x)$
0	1	1	1
π/12	0.9658	0.9659	0.9659
π/6	0.8656	0.8659	0.8660
π/4	0.7063	0.7069	0.7071
π/3	0.4988	0.4997	0.500
π/2	-0.0019	-0.0005	0

Второй аспект касается применения локального потенциала для глобальной аппроксимации решений уравнений матфизики. Эффективность использования вариационных методов в подобных случаях, как известно, в значительной степени определяется удачным подбором класса пробных функций, на множестве которых экстремализуется функционал, соответствующий данной задаче. Обычно пробные функции выбираются из соображений требуемой симметрии решения или на основании интуиции и опыта предыдущих расчетов. При этом зачастую удачными оказываются приближения, состоящие из конечного числа членов расходящихся рядов или приближения, построенные на множестве функций, не обладающих свойством полноты. В результате удачная аппроксимация становится в каждой новой задаче своего рода искусством, что порождает естественную неудовлетворенность.

В качестве процедуры для систематического выбора пробных функций предлагается последовательное применение метода частичного интегрирования Л. В. Канторовича [2] к разложениям по каждой переменной, если таковых несколько. Метод последовательных прогонок обычно приводит к достижению приемлемой точности при небольшом объеме вычислений.

Проиллюстрируем применение предлагаемого метода на конкретном примере задачи одномерной нестационарной теплопроводности.

Будем искать решение уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{12}$$

на отрезке $x \in [0,1]$ с краевыми условиями

$$x = 0: \ T = 0; \qquad x = 1: \ T = 0 \tag{13}$$

и начальным условием

$$t = 0: \quad T = 1. \tag{14}$$

Вариационная формулировка, соответствующая данной задаче, может быть представлена в виде

$$\delta \int_0^t \int_0^1 \left(T \frac{\partial T^0}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial T^0}{\partial x} \right) dx\, dt = 0. \tag{15}$$

В качестве первого приближения выбираем функцию

$$T_1 = x(1 - x) f(t). \tag{16}$$

Здесь зависимость от времени представляется произвольной функцией, а зависимость от координаты – простейшим полиномом, удовлетворяющим граничным условиям (13). Задавая решение в виде (16), мы надеемся получить достаточно хорошее приближение по *t*, так как частичное интегрирование обычно дает результат, достаточно близкий к истинной зависимости.

Подставляя (16) в (15), производя интегрирование и варьирование по $f(t)$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $f(t)$:

$$\frac{1}{30} \frac{df}{dt} + \frac{1}{3} f = 0, \tag{17}$$

откуда

$$f = Ae^{-10t}. \tag{18}$$

Будем считать, что формула (18) задает общую структуру зависимости решения от *t*. Теперь представим решение в виде

$$T_1' = e^{-Kt} \varphi(x) \tag{19}$$

с произвольной функцией $\varphi(x)$ и константой K, которую следует уточнить из краевых условий (мы надеемся только на правильность структуры (18), но не на точные значения коэффициентов).

Подставляя (19) в (15) и производя варьирование по $\varphi(x)$ и интегрирование по t, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + K\varphi = 0, \tag{20}$$

откуда

$$\varphi(x) = B_1 \sin(\sqrt{K}x) + B_2 \cos(\sqrt{K}x). \tag{21}$$

Из краевых условий (13) следует, что $B_2 = 0$ и $\sin\sqrt{K} = 0$, т.е.

$$\sqrt{K} = \pi n \quad (n = 1,2,...). \tag{22}$$

Следовательно, решение нужно представлять функциями вида

$$T(x,t) = Ae^{-Kt}\sin\left(\sqrt{K}x\right), \tag{23}$$

Подстановка (23) в (15) обращает плотность лагранжиана в тождественный нуль. Это возможно только в том случае, когда найденная зависимость является точным решением задачи (получено известное фундаментальное решение).

Решение краевой задачи представляет собой ряд, составленный из фундаментальных решений, сходящийся при $t = 0$ к начальному условию (14).

Легко показать, что

$$T(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{(2m+1)\pi} e^{-\pi^2(2m+1)t} \sin\left(\pi(2m+1)x\right), \tag{24}$$

т.е. получено точное решение задачи.

Не смотря на случайный характер совпадения точного и приближенного решений, практика применения метода прогонок дает основание надеяться на возможность обоснованного выбора представлений конкретных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шехтер Р.С. Вариационный метод в инженерных расчетах. −М.: Мир, 1971. - 292 с.

2. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: Физматлит, 1962, с. 323-344.

REFERENCES

1. RS Schechter Variational method in engineering calculations. -M .: World, 1971 - 292 p.

2. LV Kantorovich and VI Krylov Approximate methods of higher analysis. - M .: Fizmatlit, 1962, p. 323-344.

APPLICATION OF INTEGRAL VARIATIONAL PRINCIPLES IN THE SCHEMES OF APPROXIMATE CALCULATIONS

A.I. GAVRILOV, F.V. MOSKALENKO

Kuban State Technological University
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072

We consider two areas of application of the method of the local potential as a basis for finding approximate solutions of ordinary differential equations and mathematical physics encountered in solving technical problems.
Specific examples show how to use the method for the sampling problem in the cases of the spline approximation of the solution and the choice of test functions - in the case of the global approximation.
Key words: numerical solution of differential equations, variational discretization method, the trial functions.