517.521

ПРИЗНАКИ СГУЩЕНИЯ I. ОБ ОБОБЩЕНИИ ПРИЗНАКА СГУЩЕНИЯ ШЛЁМИЛЬХА. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, ОСНОВАННОЕ НА СВОЙСТВЕ МОНОТОННОСТИ

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Дано прямое и очевидное обобщение признака сгущения Шлёмильха сходимости бесконечного положительного ряда с монотонно убывающими членами. Приведено его доказательство с использованием свойства монотонности. Дана новая оценка сумме ряда в случае сходимости.

Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, положительный ряд, ряд с убывающими членами, признак сгущения, Ж. Бертран, Е. Борель, О. Коши, Н. Орезм, О. Шлемильх.

1. История признака сгущения. В приложениях часто встречаются ряды с положительными и невозрастающими членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1}$$

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots . \tag{2}$$

Таким рядом, например, является обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 0 .$$

Самая ранняя идея доказательства расходимости гармонического ряда $(s = 1)$, основанная на монотонном убывании его членов, была предложена Николаем Орезмом около 1350 года [1, 2]. Великий французский математик О. Коши развил её, предложив в 1821 году в своём «Курсе алгебраического анализа» признак сгущения [3, pp. 135 - 136]:

Положительный ряд (1), *удовлетворяющий условию* (2), *сходится или расходится вместе с рядом*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} . \tag{3}$$

В 1864 году известный французский математик Ж. Бертран в первой части «Дифференциальное исчисление» своего «Тракта о дифференциальном исчислении и исчислении интегральном» привёл очевидное обобщение признака сгущения Коши [4, pp. 234 - 235], заменив ряд (3) на общий ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} m^k a_{m^k}$$

где m – натуральное число, не меньшее двух.

Наконец знаменитый французский математик Э. Борель [5] в 1902 году заметил, что признак сгущения Коши – Бертрана можно расширить следующим образом:

Положительный ряд (1), удовлетворяющий условию (2), сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^k a_{[b^k]}, \quad b > 1, \tag{5}$$

где b *- произвольное вещественное число большее единицы,* $[b^k]$ *- целая часть вещественного числа* b^k.

В 1873 году немецкий математик О. Шлемильх [6] показал, что в признаке Коши вместо подпоследовательности членов ряда (3) можно использовать другую подпоследовательность. Он предложил следующий признак сгущения:

Положительный ряд (1), удовлетворяющий условию (2), сходится или расходится одновременно с рядами

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) a_{k^2} \ \text{ и } \ \sum_{k=1}^{\infty} k a_{k^2} . \tag{6}$$

Очевидное обобщение признака Шлемильха, названное *степенным признаком сгущения,* было дано недавно автором этих строк [7]:

Положительный ряд (1), *удовлетворяющий условию* (2), *сходится или расходится одновременно с рядами*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k^m-(k-1)^m)a_{k^m} \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty}(k^m-(k-1)^m)a_{k^m}\,. \qquad (7)$$

В случае сходимости, справедлива оценка (*в* [7] *оценка получена грубее*)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^m-(k-1)^m\right)a_{k^m} \le \sum_{n=1}^{\infty}a_n \le (2^m-1)\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^m-(k-1)^m\right)a_{k^m}\,. \qquad (8)$$

2. Доказательство степенного признака сгущения, основанное на свойстве монотонного убывания членов положительного ряда [7]. Обозначим через S_n *n*-ю частичную сумму ряда (1)

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n\,,\; n = 1, 2, 3, ...,$$

а через T_k *k*-ю частичную сумму первого ряда формулы (7), $k = 1, 2, 3, ...$.

$$T_k = 1^m a_{1^m} + (2^m - 1^m)a_{2^m} + ... + (k^m - (k-1)^m)a_{k^m}\,.$$

Поскольку члены ряда (1) не возрастают, то для суммы из $n_{k+1} - n_k$ слагаемых справедливы неравенства

$$a_{n_k+1} + a_{n_k+2} + ... + a_{n_{k+1}} \ge (n_{k+1} - n_k)a_{n_{k+1}} \qquad (9)$$

и

$$a_{n_k} + a_{n_k+1} + ... + a_{n_{k+1}-1} \le (n_{k+1} - n_k)a_{n_k}\,. \qquad (10)$$

Предположим теперь, что ряд (1) сходится к своей сумме *S*. Тогда любая его частичная сумма ограничена: $S_n < S$, $n = 1, 2, 3, ...$. Возьмём произвольную частичную сумму T_k первого ряда (7). Для выбранного номера *k* подберём наименьшее число n так, чтобы $k^m \le n$. Тогда в силу не отрицательности членов ряда (1) получим

$$S_n = a_1 + ... + a_n \ge a_{1^m} + a_{1^m+1} + ... + a_{2^m} + ... + a_{(k-1)^m} + a_{(k-1)^m+1} + ... + a_{k^m}.$$

Сгруппируем в последней сумме слагаемые, начиная с a_{1^m+1}, a_{2^m+1}, …, $a_{(k-1)^m+1}$, … последовательно суммами с числом слагаемых $2^m - 1^m, 3^m - 2^m, 4^m - 3^m, ..., k^m - (k-1)^m$. Тогда получим, применяя неравенство (9), цепочку неравенств

$$S > S_n \ge a_1 + (a_{1^m+1} + ... + a_{2^m}) + (a_{2^m+1} + ... + a_{3^m}) + ... + (a_{(k-1)^m+1} + ... + a_{k^m}) \ge$$

$$\ge a_1 + (2^m - 1^m)a_{2^m} + (3^m - 2^m)a_{3^m} + ... + (k^m - (k-1)^m)a_{k^m} = T_k.$$

Следовательно, частичные суммы T_k ограничены сверху суммой S. Поэтому первый ряд (7) сходится и его сумма T удовлетворяет левой части неравенства (8) $T \le S$.

Предположим теперь, что первый ряд (7) сходится к сумме T. В таком случае $T_k < T$ для любого номера k. Для выбранного номера n подберём наименьшее число k так, чтобы $n \le (k+1)^m - 1$. Тогда в силу не отрицательности членов ряда (1) получим

$$S_n = a_1 + ... + a_n \le a_{1^m} + ... + a_{2^m} + ... + a_{3^m-1} + ... + a_{k^m} + a_{k^m+1} + ... + a_{(k+1)^m-1}.$$

Сгруппируем в последней сумме слагаемые, начиная с a_{1^m}, a_{2^m}, …, a_{k^m}, … последовательно суммами с числом слагаемых $2^m - 1^m, 3^m - 2^m, 4^m - 3^m, ..., (k+1)^m - k^m$. Тогда получим, применяя неравенство (10), цепочку неравенств

$$S_n = a_1 + ... + a_n \le a_{1^m} + ... + a_{2^m} + ... + a_{3^m-1} + ... + a_{k^m} + a_{k^m+1} + ... + a_{(k+1)^m-1} \le$$

$$\le (a_{1^m} + \ldots + a_{2^m-1}) + (a_{2^m} + \ldots + a_{3^m-1}) + \ldots + (a_{k^m} + a_{k^m+1} + \ldots + a_{(k+1)^m-1}) \le$$

$$\le (2^m - 1^m)a_{1^m} + \ldots + (3^m - 2^m)a_{2^m} + \ldots + ((k+1)^m - k^m)a_{k^m}. \qquad (11)$$

Докажем теперь, что найдётся такое вещественное число $M > 0$, что неравенство

$$(k+1)^m - k^m \le M\left(k^m - (k-1)^m\right) \qquad (12)$$

будет верным для всех натуральных значений $k \ge 1$. Для этого рассмотрим дробь, принимающую, очевидно, положительные значения.

$$\frac{(k+1)^m - k^m}{k^m - (k-1)^m} = \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^m - 1}{1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^m} > 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (13)$$

Докажем, что эта дробь убывает с возрастанием переменной k. Для этого рассмотрим положительную функцию

$$f(x) = \frac{(1+x)^m - 1}{1-(1-x)^m} > 0, \; 0 < x \le 1, \qquad (14)$$

которая для значений $x = \dfrac{1}{k}$ совпадает дробью из левой части неравенства (13). Так как её логарифмическая производная положительна

$$\frac{d}{dx}\ln f(x) = m\frac{(1+x)^{m-1} + (1-x)^{m-1} + 2x(1+x)^{m-1}(1-x)^{m-1}}{\left((1+x)^m - 1\right)\left(1-(1-x)^m\right)} > 0, \; 0 < x \le 1,$$

то при стремлении переменной x к значению $x = 0$ справа, функция $f(x)$ будет убывать. Тогда функция

$$f\left(\frac{1}{k}\right)=\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^m-1}{1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^m},$$

совпадающая с дробью в формуле (13) будет принимать наибольшее значение для значения $k=1$. Отсюда следует, что постоянная M из неравенства (12) равна

$$M=f(1)=2^m-1.$$

Применив неравенство (12) к каждой разности в правой части неравенства (11), получим для натуральных значений $m\geq 2$ и $k\geq 1$

$$S_n\leq (2^m-1)\left(a_{1^m}+...+(k^m-(k-1)^m)a_{k^m}\right)\leq (2^m-1)T_k<(2^m-1)T.$$

Следовательно, частичные суммы S_n ограничены сверху. Тогда ряд (1) сходится и его сумма S удовлетворяет неравенству (8).

Так как при выполнении условий признака ряд (1) и первый ряд (7) сходятся одновременно, тогда и расходиться они могут только одновременно.

Докажем теперь, что ряды (7) сходятся или расходятся одновременно. Для доказательства воспользуемся неравенством

$$k^{m-1}\leq k^m-(k-1)^m\leq mk^{m-1}, \tag{15}$$

справедливым для всех натуральных значений m и k. Действительно, применяя формулу сокращённого умножения

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

и цепочку очевидных неравенств

$$k-1\leq k,\ (k-1)^2\leq k^2,\ \dots,\ (k-1)^{m-1}\leq k^{m-1},$$

получим правую часть неравенства (15)

$$k^m-(k-1)^m=k^{m-1}+k^{m-2}(k-1)+...+k(k-1)^{m-2}+(k-1)^{m-1}\le mk^{m-1}.$$

Отбрасывая теперь все слагаемые после первого, приходим к левой части неравенства (15)

$$k^m-(k-1)^m=k^{m-1}+k^{m-2}(k-1)+...+k(k-1)^{m-2}+(k-1)^{m-1}\ge k^{m-1}.$$

Одновременная сходимость или расходимость рядов (7) теперь следует из неравенства, связывающего n-е члены этих рядов

$$k^{m-1}a_{k^m}\le\left(k^m-(k-1)^m\right)a_{k^m}\le mk^{m-1}a_{k^m}.$$

Доказательство степенного признака сгущения завершено.

В качестве примера применения степенного признака исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}.$$

Согласно степенному признаку сгущения (мы выбираем $m=2$, что соответствует признаку Шлёмильха), это ряд сходится или расходится вместе с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{1}{2^{\sqrt{k^2}}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}=2. \tag{16}$$

Сходимость последнего ряда (бесконечной арифметико-геометрической прогрессией первого порядка) легко установить с помощью признака Даламбера [3,4,5,8,9]. Впрочем, сумма этого ряда, равная двум, была фактически найдена ещё в 1350 году английским учёным Ричардом Суайнсхедом [1]. Вычислению суммы арифметико-геометрической прогрессии произвольного порядка мы планируем посвятить в дальнейшем статью. Поэтому не будем сейчас пояснять, как была найдена сумма ряда (16).

Заключение. Степенной признак сгущения доказан с учетом монотонного убывания членов положительного ряда за счёт выбора степенной подпоследовательности

$$\left\{k^m\right\}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Точно так же, как делал это Шлемильх, выбирая подпоследовательность $\left\{k^2\right\}$ для доказательства своего признака.

Американские математики Д. Бонар и М. Кхоури в своей книге по вещественным рядам [8] ошибочно приписали О. Шлёмильху признак сгущения, изложенный в книге К. Кноппа [9], для которого, как можно показать, показательный и степенной признаки сгущения являются частными случаями.

В следующей работе будет дано доказательство общего степного признака сгущения, основанное на использовании интегрального признака.

ЛИТЕРАТУРА

1. **История математики. Т1.** С древнейших времен до начала нового времени. Под ред. А.П. Юшкевича. М. Наука, 1970. 351 с.

2. **Статья «Гармонический ряд»** из сетевой энциклопедии ВикипедиЯ, http://ru.wikipedia.org/wiki/Гармонический_ряд .

3. **Cauchy A.L.** Cours d'analyse de l'École royale polytechnique I.re partie: Analyse algébrique. – Paris: Impr. royale Debure frères, 1821. 576 p.

4. **Bertrand J.** Traité de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral. Premiére Partie. Calcul Différentiel, Paris, Gauthier-Villars, 1864. 780 p.

5. **Borel E.** Leçons sur les Séries a Termes Positifs. Paris, Gauthier-Villars, 1902. 91 p.

6. **Schlömilch O.** Ueber dei gleichzeitige Convergenz oder Divergenz zweier Reihen. ZfMuP, 1873, b28, s. 425-426.

7. **Терещенко И.В.** О обобщении признака сгущения Шлёмильха / Сб. науч. статей IV Межд. научно-прак. конф. «Научные чтения имени проф. Н.Е. Жуковского» 17-19 декабря 2013 г. – Краснодар. – 2014. сс. 155-161.

8. **Bonar D.D., Khoury M. Jr.** Real infinite series. – Mathematical Association of America, 2006. 264 c.

9. **Knopp K.** Theorie und anwendung der unendlichen reihen. Berlin, Springer, 1922. 474 s.

REFERENCES

1. **Istorija matematiki. T1.** S drevnejshih vremen do nachala novogo vremeni. (A history of mathematics. T1. From Ancient Times To The Beginning Of A New Time) Pod red. A.P. Jushkevicha. Moscow, 1970. 351 p.

2. **Stat'ja «Garmonicheskij rjad» (The Harmonic Series)** iz setevoj jenciklopedii VikipediJa, http://ru.wikipedia.org/wiki/Гармонический_ряд .

3. **Cauchy A.L.** Cours d'analyse de l'École royale polytechnique I.re partie: Analyse algébrique. – Paris: Impr. royale Debure frères, 1821. 576 p.

4. **Bertrand J.** Traité de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral. Premiére Partie. Calcul Différentiel, Paris, Gauthier-Villars, 1864. 780 p.

5. **Borel E.** Leçons sur les Séries a Termes Positifs. Paris, Gauthier-Villars, 1902. 91 p.

6. **Schlömilch O.** Ueber dei gleichzeitige Convergenz oder Divergenz zweier Reihen. ZfMuP, 1873, b28, s. 425-426.

7. **Tereshchenko I.V.** O obobshhenii priznaka sgushhenija Shljomil'ha (On a generalization of The Schlömilch's Condensation Test) / Sb. nauch. statej IV Mezhd. nauchno-prak. konf. «Nauchnye chtenija imeni prof. N.E. Zhukovskogo» 17-19 dekabrja 2013 g. – Krasnodar. – 2014. pp. 155-161.

8. **Bonar D.D., Khoury M. Jr.** Real infinite series. – Mathematical Association of America, 2006. 264 c.

9. **Knopp K.** Theorie und anwendung der unendlichen reihen. Berlin, Springer, 1922. 474 s.

517.521

CONDENSATION TESTS I. ABOUT THE GENERALIZATION OF SCHLÖMILCH'S CONDENSATION TEST. THE PROOF BASED ON THE PROPERTY OF MONOTONICITY

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

The direct and obvious generalization of Schlömilch's condensation test for convergence of the infinite series with the positive decreasing terms is given. A proof using the property of monotonicity is presented. New sum bounds of the infinite series in the case of convergence are given.
Keywords: infinite series, positive infinite series, infinite series with the decreasing terms, condensation test, J. Bertrand, E. Borel, A. Cauchy, N. Oresme, O. Schlömilch.