УДК 517.521

ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ЕРМАКОВА ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО БЕСКОНЕЧНОГО ТРОЙНОГО РЯДА С МОНОТОННО УБЫВАЮЩИМИ ЧЛЕНАМИ

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350002, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Приведён признак Ермакова для обыкновенного бесконечного ряда. Дана его формулировка в предельной форме, в том числе с использованием верхнего и нижнего предела. Изложены основные понятия теории тройных рядов. Впервые дано доказательство признака Ермакова для положительных тройных рядов. Это доказательство аналогично доказательству признака Ермакова для обычных рядов и основано на применении интегрального признака сходимости для тройных рядов. Рассмотрена и доказана предельная форма признака Ермакова для тройных рядов. Приведён пример применения этого признака.

Ключевые слова: бесконечный тройной числовой ряд, бесконечный положительный тройной числовой ряд, признак Ермакова, признак Ермакова для двойного ряда, признак Ермакова для тройного ряда.

1. Введение. Одним из самых «чувствительных» признаков сходимости положительных бесконечных числовых рядов с монотонно убывающими членами считается признак Ермакова, открытый в 1871 году известным русским математиком В.П. Ермаковым [1, 2]. Приведём его современную формулировку [3].

Признак Ермакова. *Пусть на промежутке* $1 \le x < \infty$ *задана непрерывная монотонно убывающая положительная функция* $f(x) > 0$. *Пусть к тому же на этом промежутке задана положительная, монотонно возрастающая и неограниченна сверху всюду непрерывно дифференцируемая функция* $\varphi(x) > 0$, *удовлетворяющая неравенству* $\varphi(x) > x$. *Тогда*

1) *если, начиная с некоторого значения* $x_0 \ge 1$, *выполняется условие*

$$\frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} \le q < 1, \quad x \ge x_0, \tag{1}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *сходится.*

2) *если, начиная с некоторого значения* $x_0 \ge 1$, *выполняется условие*

$$\frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} \geq 1, \quad x \geq x_0, \tag{2}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *расходится.*

Ермаков считал, что наиболее простым и в тоже время очень чувствительным его признак получается при выборе функции $\varphi(x) = e^x$. В этом случае признак Ермакова называется показательным признаком Ермакова [4-7].

Признак Ермакова можно сформулировать в предельной форме.

Признак Ермакова в предельной форме. Пусть на промежутке $1 \leq x < \infty$ задана непрерывная монотонно убывающая положительная функция $f(x) > 0$. Пусть к тому же на этом промежутке задана положительная, монотонно возрастающая и неограниченна сверху всюду непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x) > 0$, удовлетворяющая неравенству $\varphi(x) > x$. Тогда, если

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} = q, \tag{3}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *сходится при условии* $q < 1$ и *расходится при условии* $q > 1$.

Понятно, что предельная форма признака Ермакова менее общая, чем первая. Однако её можно значительно усилить, используя понятия верхнего и нижнего предела, и заменив условия 1) и 2) (формулы (1) и (2)) на следующие

$$1) \text{ если } \overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} < 1, \text{ то ряд сходится;} \tag{4}$$

$$2) \text{ если } \underline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} > 1, \text{ то ряд расходится.} \tag{5}$$

Аналог признака Ермакова сходимости положительного двойного ряда с монотонно убывающими членами был недавно доказан автором этой статьи [8].

2. Необходимые сведения из теории тройных рядов. Теория бесконечных числовых тройных рядов изложена в работе автора [9] и строится в полной аналогии с теорией двойных рядов, представленной в работах [4, 7, 10-14]. Приведём здесь только необходимые для дальнейшего понимания сведения.

Членами тройного ряда будем называть члены некоторой тройной вещественной последовательности

$$\left\{a_{nmp}\right\}. \tag{6}$$

Суммы первых членов последовательности (6) будем называть частичными суммами тройного ряда. Однако, в отличие от теории обыкновенных бесконечных рядов, не существует однозначного способа определения частичной суммы тройного ряда. В дальнейшем мы будем рассматривать частичные суммы по прямоугольным параллелепипедам.

Частичной суммой тройного ряда по прямоугольным параллелепипедам называется конечная тройная сумма членов последовательности (6)

$$S_{nmp} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} a_{ijk}\,. \tag{7}$$

Множество всех частичных сумм S_{nmp} само образует тройную числовую последовательность $\left\{S_{nmp}\right\}$, которую будем называть бесконечным числовым тройным рядом и обозначать символом

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ijk} \tag{8}$$

Суммой числового бесконечного тройного ряда (8) по Прингсхейму называется вещественное число S равное конечному пределу частичных сумм (7) при стремлении n, m и p независимо друг от друга к бесконечности

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty\\ p\to\infty}} S_{nmp} = S\,.$$

Более точно это означает, что для любого сколь угодно малого вещественного числа $\varepsilon > 0$ найдётся натуральное число N_ε, в общем случае зависящее от числа ε, такое, что неравенство $\left|S_{nmp} - S\right| < \varepsilon$ выполняется для всех натуральных чисел n, m и p таких, что $\min(n, m, p) > N_\varepsilon$, (другими словами $n > N_\varepsilon$, $m > N_\varepsilon$, $p > N_\varepsilon$). Сумму сходящегося тройного ряда обозначают тем же символом, что и сам тройной ряд (8)

$$S = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ijk} .$$

Бесконечный числовой тройной ряд (8) называется сходящимся, если он имеет конечную сумму S. В противном случае ряд называется расходящимся. Ряд называется положительным, если все его члены неотрицательны $a_{ijk} \geq 0$. Ряд называется строго положительным, если все его члены положительны $a_{ijk} > 0$.

Если воспользоваться другим набором частичных сумм, например, по треугольным пирамидам или по шарам, и определить сумму ряда как предел частичных сумм, то она может не совпадать с суммой ряда по Прингсхейму или ряд может расходиться [13, с. 57]

$$S_n = \sum_{3 \leq i+j+k \leq n} a_{ijk} \ \text{ или } \ S_n = \sum_{3 \leq \sqrt{i^2+j^2+k^2} \leq n} a_{ijk} .$$

Из определения сходящегося тройного ряда (8) следуют все свойства этих рядов, которые во многом совпадают со свойствами обычных сходящихся бесконечных рядов [4, 7, 10-14].

3. Признак Ермакова сходимости положительного тройного ряда с монотонно убывающими членами. Среди известных на данный момент признаков сходимости положительных тройных рядов с монотонно убывающими членами отсутствует аналог признака Ермакова. В этом пункте мы докажем этот признак для таких рядов.

Признак Ермакова для тройных рядов. *Пусть на множестве* $1 \le x < \infty,\ 1 \le y < \infty,\ 1 \le z < \infty$ *задана непрерывная невозрастающая положительная функция* $f(x,y,z) > 0$ $(f(x,y,z) \le f(x_0,y_0,z_0),\ x > x_0,\ y > y_0,$ $z > z_0)$. *Пусть к тому же на промежутках* $1 \le x < \infty, 1 \le y < \infty$ *и* $1 \le z < \infty$ *заданы три положительные, монотонно возрастающие и неограниченные сверху всюду непрерывно дифференцируемые функции* $\varphi(x) > 0,\ \psi(y) > 0$ *и* $\eta(z) > 0$, *удовлетворяющие неравенствам* $\varphi(x) > x,\ \psi(y) > y$ *и* $\eta(z) > z$. *Тогда*

1) *если, начиная с некоторых значений* $x_0 \ge 1,\ y_0 \ge 1$ *и* $z_0 \ge 1$, *выполняется условие*

$$\frac{\varphi'(x)\psi'(y)\eta'(z)f(\varphi(x),\psi(y),\eta(z))}{f(x,y,z)} \le q < 1, \quad x \ge x_0,\ y \ge y_0,\ z \ge z_0, \tag{9}$$

то тройной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} f(n,m,p)$ *сходится.*

2) *если, начиная с некоторых значений* $x_0 \ge 1,\ y_0 \ge 1$ *и* $z_0 \ge 1$, *выполняется условие*

$$\frac{\varphi'(x)\psi'(y)\eta'(z)f(\varphi(x),\psi(y),\eta(z))}{f(x,y,z)} \ge 1, \quad x \ge x_0,\ y \ge y_0,\ z \ge z_0, \tag{10}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} f(n,m,p)$ *расходится.*

Доказательство. Рассмотрим сначала первый случай. Из неравенства (9) следует, что

$$\varphi'(x)\psi'(y)\eta'(z)f(\varphi(x),\psi(y),\eta(z)) \le q f(x,y,z),\ q < 1,\ x \ge x_0,\ y \ge y_0,\ z \ge z_0. \tag{11}$$

Поскольку функция $f(x,y,z)$ непрерывна на неограниченном кубе $[1,\infty)\times[1,\infty)\times[1,\infty)$, то на любом прямоугольном параллелепипеде $[x_0,x]\times[y_0,y]\times[z_0,z]$ из этого куба функция $f(x,y,z)$ интегрируема. Так как $x_0 < x,\ y_0 < y,\ z_0 < z$, то $x_0 < \varphi(x_0),\ y_0 < \psi(y_0),\ z_0 < \eta(\mathrm{z}_0)$, поэтому в силу монотонности функций $\varphi(x)$, $\psi(y)$ и $\eta(z)$ имеем $x_0 < \varphi(x_0) < \varphi(x)$, $y_0 < \psi(y_0) < \psi(y)$, $z_0 < \eta(z_0) < \eta(z)$. Следовательно, куб $[\varphi(x_0),\varphi(x)]\times[\psi(y_0),\psi(y)]\times[\eta(z_0),\eta(z)]$ принадлежит неограниченному кубу $[1,\infty)\times[1,\infty)\times[1,\infty)$. Проинтегрируем функцию $f(r,s,t)$ по этому кубу, переходя к повторному интегралу

$$\int\limits_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)}\int\limits_{\psi(y_0)}^{\psi(y)}\int\limits_{\eta(z_0)}^{\eta(z)} f(r,s,t)drdsdt = \int\limits_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} dr \int\limits_{\psi(y_0)}^{\psi(y)} ds \int\limits_{\eta(z_0)}^{\eta(z)} dt\, f(r,s,t). \qquad (12)$$

Совершая в повторном интеграле (12) замену переменных $r=\varphi(u)$, $s=\psi(v)$, $t=\eta(w)$ и возвращаясь от повторного интеграла к тройному интегралу, получим

$$\int\limits_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} dr \int\limits_{\psi(y_0)}^{\psi(y)} ds \int\limits_{\eta(z_0)}^{\eta(z)} dt\, f(r,s,t) = \int\limits_{x_0}^{x} \varphi'(u)du \int\limits_{y_0}^{y} \psi'(v)dv \int\limits_{z_0}^{z} f(\varphi(u),\psi(v),\eta(w))\eta'(w)dw =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z} f(\varphi(u),\psi(v),\eta(w))\varphi'(u)\psi'(v)\eta'(w)dudvdw$$

или

$$\int\limits_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)}\int\limits_{\psi(y_0)}^{\psi(y)}\int\limits_{\eta(z_0)}^{\eta(z)} f(r,s,t)drdsdt = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z} f(\varphi(u),\psi(v),\eta(w))\varphi'(u)\psi'(v)\eta'(w)dudvdw. \qquad (13)$$

Для справедливости этой формулы достаточно, чтобы функция $f(x,y,z)$ была непрерывна на прямоугольном параллелепипеде $[\varphi(x_0),\varphi(x)]\times[\psi(y_0),\psi(y)]\times[\eta(z_0),\eta(z)]$, а производные $\varphi'(x)$, $\psi'(y)$ и $\eta'(z)$ были непрерывны соответственно на отрезках $[x_0,x]$, $[y_0,y]$ и $[z_0,z]$ [7]. Эти условия обеспечены условиями признака Ермакова. Используя неравенство (11) и неравенства $\varphi(x)>x$, $\psi(y)>y$ и $\eta(z)>z$, из равенства (13) получим

$$\int\limits_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)}\int\limits_{\psi(y_0)}^{\psi(y)}\int\limits_{\eta(z_0)}^{\eta(z)} f(r,s,t)drdsdt \le q\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z} f(u,v,w)dudvdw \le q\int\limits_{x_0}^{\varphi(x)}\int\limits_{y_0}^{\psi(y)}\int\limits_{z_0}^{\eta(z)} f(u,v,w)dudvdw$$

или

$$\int_{x_0}^{\varphi(x)}\int_{y_0}^{\psi(y)}\int_{z_0}^{\eta(z)} f(r,s,t)drdsdt-\int_{x_0}^{\varphi(x_0)}\int_{y_0}^{\psi(y_0)}\int_{z_0}^{\eta(z_0)} f(r,s,t)drdsdt \le q\int_{x_0}^{\varphi(x)}\int_{y_0}^{\psi(y)}\int_{z_0}^{\eta(z)} f(u,v,w)dudvdw.$$

Откуда

$$\int_{x_0}^{\varphi(x)}\int_{y_0}^{\psi(y)}\int_{z_0}^{\eta(z)} f(u,v,w)dudvdw \le \frac{1}{1-q}\int_{x_0}^{\varphi(x_0)}\int_{y_0}^{\psi(y_0)}\int_{z_0}^{\eta(z_0)} f(r,s,t)drdsdt.$$

В силу того, что $\varphi(x)>x>x_0$, $\psi(y)>y>y_0$, $\eta(z)>z>z_0$, $f(x,y,z)>0$ и

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} f(u,v,w)dudvdw \le \int_{x_0}^{\varphi(x)}\int_{y_0}^{\psi(y)}\int_{z_0}^{\eta(z)} f(u,v,w)dudvdw,$$

мы можем усилить предпоследнее неравенство

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} f(u,v,w)dudvdw \le \frac{1}{1-q}\int_{x_0}^{\varphi(x_0)}\int_{y_0}^{\psi(y_0)}\int_{z_0}^{\eta(z_0)} f(r,s,t)drdsdt. \quad (14)$$

Поскольку $f(x,y,z)>0$ и значения x , y и z произвольны, лишь бы $x>x_0$, $y>y_0$ и $z>z_0$, то из неравенства (14) следует, что несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\int_1^{\infty}\int_1^{\infty} f(x,y)dxdydz$ сходится. В таком случае, согласно интегральному признаку для тройного ряда [1, р. 80], ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} f(n,m,p)$ так же сходятся. Первая часть признака Ермакова доказана.

Рассмотрим теперь второй случай. Из неравенства (10) следует, что

$$\varphi'(x)\psi'(y)\eta'(z)f(\varphi(x),\psi(y),\eta(z)) \ge f(x,y,z), \quad x\ge x_0,\ y\ge y_0,\ z\ge z_0. \quad (15)$$

Интегрируя функцию $f(x,y,z)$ по прямоугольному параллелепипеду $[\varphi(x_0),\varphi(x)]\times[\psi(y_0),\psi(y)]\times[\eta(z_0),\eta(z)]$, получим, применяя подстановки $r=\varphi(u)$, $s=\psi(v)$, $t=\eta(w)$ (их обоснование дано при доказательстве первого случая) и неравенство (15)

$$\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)}\int_{\psi(y_0)}^{\psi(y)}\int_{\eta(z_0)}^{\eta(z)} f(s,t)drdsdt = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} f(\varphi(u),\psi(v))\varphi'(u)\psi'(v)\eta'(w)dudvdw \geq$$

$$\geq \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} f(u,v,w)dudvdw\,.$$

Прибавляя к обеим частям неравенства интеграл $\int_{x}^{\varphi(x_0)}\int_{y}^{\psi(y_0)}\int_{z}^{\eta(z_0)} f(r,s,t)drdsdt$, получим

$$\int_{x}^{\varphi(x)}\int_{y}^{\psi(y)}\int_{z}^{\eta(z)} f(r,s,t)drdsdt \geq \int_{x_0}^{\varphi(x_0)}\int_{y_0}^{\psi(y_0)}\int_{z_0}^{\eta(z_0)} f(r,s,t)drdsdt = L \tag{16}$$

Так как $\varphi(x_0) > x_0$, $\psi(y_0) > y_0$, $\eta(z_0) > z_0$ и $f(r,s,t) > 0$, то $L > 0$. Зададим теперь три последовательности $\{x_i\}$, $\{y_j\}$ и $\{z_k\}$ следующим образом:

$$x_i = \varphi(x_{i-1}),\ i = 1, \dots, n, \dots;\ y_j = \psi(y_{j-1}),\ j = 1, \dots, n, \dots, z_k = \eta(z_{k-1}),\ k = 1, \dots, n, \dots\ .$$

Из неравенства (16) следует, что

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{y_{j-1}}^{y_j}\int_{z_{k-1}}^{z_k} f(r,s,t)drdsdt \geq L, \quad i = 1, 2, \dots, n, \dots;\ j = 1, 2, \dots, m, \dots;\ k = 1, 2, \dots, p, \dots$$

Суммируя по i от 1 до n, по j от 1 до m и по k от 1 до p это неравенство, получим

$$\int_{x_0}^{x_n}\int_{y_0}^{y_m}\int_{z_0}^{z_p} f(r,s,t)drdsdt = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{y_{j-1}}^{y_j}\int_{z_{k-1}}^{z_k} f(r,s,t)drdsdt \geq nmpL\,,$$

то есть интеграл $\int_{x_0}^{x_n}\int_{y_0}^{y_m}\int_{z_0}^{z_p} f(r,s,t)drdsdt$ неограничен при стремлении $n \to \infty$, $m \to \infty$ и $p \to \infty$ независимо друг от друга. Так как $\varphi(x) > x$, $\psi(y) > y$ и

$\eta(z) > z$, то последовательности $\{x_i\}$, $\{y_j\}$ и $\{z_k\}$ должны строго монотонно возрастать в силу того, что $x_i = \varphi(x_{i-1}) > x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, $y_i = \psi(y_{j-1}) > y_{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots, m, \ldots$ и $\eta_k = \eta(y_{k-1}) > y_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, p, \ldots$. Действительно, предположим противное. Пусть они ограничены сверху. Тогда последовательности сходятся соответственно к некоторым пределам *a*, *b* и *c*, причём $x_i < a$ для любого номера *i*, $y_i < b$ для любого номера *j* и $z_k < c$ для любого номера *k*. Поэтому для любых натуральных чисел *n*, *m и p* должно выполняться неравенство

$$\int_{x_0}^{a}\int_{y_0}^{b}\int_{z_0}^{c} f(r,s,t)drdsdt \geq \int_{x_0}^{x_n}\int_{y_0}^{y_m}\int_{z_0}^{z_p} f(r,s,t)drdsdt \geq nmpL,$$

что невозможно, так как правая часть неравенства неограниченно возрастает с ростом *n*, *m* и *p*. Следовательно, последовательности $\{x_i\}$, $\{y_j\}$ и $\{z_p\}$ неограниченны сверху и несобственный интеграл расходится

$$\int_{x_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty}\int_{z_0}^{\infty} f(r,s,t)drdsdt = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty \\ p\to\infty}} \int_{x_0}^{x_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{z_0}^{z_p} f(r,s,t)drdsdt = +\infty.$$

В таком случае, согласно интегральному признаку тройной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} f(n,m,p)$ также расходится.

Вторая часть признака Ермакова доказана.

4. Признак Ермакова в предельной форме сходимости положительного тройного ряда с монотонно убывающими членами. Так же, как в случае обыкновенных положительных бесконечных рядов, признак Ермакова можно сформулировать в предельной форме.

Признак Ермакова в предельной форме. *Пусть на множестве* $1 \leq x < \infty$, $1 \leq y < \infty$, $1 \leq z < \infty$ *задана непрерывная монотонно убывающая положительная функция* $f(x,y,z) > 0$ $(f(x,y,z) > f(x_0,y_0,z_0)$, $x > x_0$, $y > y_0$, $z > z_0)$. *Пусть к тому же на промежутках* $1 \leq x < \infty$, $1 \leq y < \infty$ *и* $1 \leq z < \infty$

заданы три положительные, монотонно возрастающие и неограниченные сверху всюду непрерывно дифференцируемые функции $\varphi(x)>0$, $\psi(y)>0$ *и* $\eta(z)>0$, *удовлетворяющие неравенствам* $\varphi(x)>x$, $\psi(y)>y$ *и* $\eta(z)>z$. *Тогда если*

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty\\ z\to+\infty}}\frac{\varphi'(x)\psi'(y)\eta'(z)f(\varphi(x),\psi(y),\eta(z))}{f(x,y,z)}=q\,, \tag{17}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}f(n,m,p)$ *сходится при условии* $q<1$ и *расходится при условии* $q>1$.

Доказательство. Из определения предела функции нескольких переменных в точке $(+\infty,+\infty,\dots,+\infty)$ [15] следует, что предел (17) означает выполнение двойного неравенства

$$q-\varepsilon<\frac{\varphi'(x)\psi'(y)\eta'(z)f(\varphi(x),\psi(y),\eta(z))}{f(x,y,z)}<q+\varepsilon\,,$$

для сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon>0$ сразу для всех значений x, y и z, больших, чем некоторое число $\Delta_\varepsilon>0$. Перепишем это неравенство иначе

$$(q-\varepsilon)f(x,y,z)<\varphi'(x)\psi'(y)\eta'(z)f(\varphi(x),\psi(y),\eta(z))<(q+\varepsilon)f(x,y,z)\,. \tag{18}$$

Если $q<1$, то подобрав достаточно малое ε, получим $q'=q+\varepsilon<1$. Тогда, сравнив правую часть неравенства (18) с неравенством (11), по признаку Ермакова из пункта 3 получим, что тройной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}f(n,m,p)$ сходится.

Если $q>1$, то подобрав достаточно малое ε, получим $q''=q-\varepsilon>1$. Тогда, сравнив левую часть неравенства (18) с неравенством (15), по признаку Ермакова из пункта 3 получим, что тройной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}f(n,m,p)$ расходится. Придельная форма признака Ермакова для тройного ряда доказана.

Понятно, что предельная форма признака Ермакова менее общая, чем первая. Однако её можно значительно усилить, используя понятия верхнего и нижнего предела, заменив предел (17) на следующие пределы

1) если $\overline{\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty\\ z\to+\infty}}} \dfrac{\varphi'(x)\psi'(y)\eta'(z)f(\varphi(x),\psi(y),\eta(z))}{f(x,y,\mathrm{z})} = q, \quad q<1$, то ряд сходится; (19)

2) если $\underline{\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty\\ z\to+\infty}}} \dfrac{\varphi'(x)\psi'(y)\eta'(z)f(\varphi(x),\psi(y),\eta(z))}{f(x,y,\mathrm{z})} = q, \ q>1$, то ряд расходится. (20)

Приведём пример применения признака Ермакова.

Пример. Исследовать тройной ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p}^{\infty}\frac{1}{(n+m+p)^{\sigma}}, \quad \sigma>0 \tag{21}$$

Пусть $\sigma>3$. Рассмотрим положительную и монотонно убывающую функцию $f(x,y,z)=\dfrac{1}{(x+y+z)^{\sigma}}$, выбрав в качестве функций $\varphi(x)=e^{x}$, $\psi(y)=e^{y}$ и $\eta(z)=e^{z}$. Согласно признаку Ермакова необходимо вычислить предел

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty\\ z\to+\infty}}\frac{e^{x}e^{y}e^{z}(x+y+z)^{\sigma}}{(e^{x}+e^{y}+e^{z})^{\sigma}}. \tag{22}$$

Используя известное из элементарной математики неравенство, о том, что среднее арифметическое трёх положительных чисел $a>0$, $b>0$ и $c>0$ не меньше их среднего геометрического $\dfrac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$, имеем оценку

$$0\leq\frac{e^{x}e^{y}e^{z}(x+y+z)^{\sigma}}{(e^{x}+e^{y}+e^{z})^{\sigma}}\leq\frac{e^{x+y+z}(x+y+z)^{\sigma}}{3^{\sigma}e^{(x+y+z)\frac{\sigma}{3}}}=\frac{1}{3^{\sigma}}\frac{(x+y+z)^{\sigma}}{e^{(x+y+z)\left(\frac{\sigma}{3}-1\right)}}. \tag{23}$$

Так как $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{3^{\sigma}}\frac{t^{\sigma}}{e^{t\left(\frac{\sigma}{3}-1\right)}}=0$, то $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty\\ z\to+\infty}}\frac{1}{3^{\sigma}}\frac{(x+y+z)^{\sigma}}{e^{(x+y+z)\left(\frac{\sigma}{3}-1\right)}}=0$. Поэтому, переходя в неравенстве (23) к пределу, по теореме о двух полицейских получим предел

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty\\ z\to+\infty}}\frac{e^x e^y e^z (x+y+z)^{\sigma}}{(e^x+e^y+e^z)^{\sigma}}=0,\ \sigma>3.$$

Следовательно, ряд (21) сходится, если $\sigma>3$.

Пусть $0<\sigma<2$. Несложно доказать следующие неравенства

$$ab\ge a+b,\quad a\ge 2,\ b\ge 2, \tag{24}$$

$$abc\ge\frac{4}{3}(a+b+c),\quad a\ge 2,\ b\ge 2,\ c\ge 2. \tag{25}$$

Действительно, пусть $a=2+\alpha,\ b=2+\beta,\ \alpha\ge 0,\ \beta\ge 0$. Подставляя эти значения в неравенство (24), получим

$$4+2\alpha+2\beta+\alpha\beta\ge 4+\alpha+\beta.$$

Откуда, в силу неотрицательности значений α и β, следует верное равенство

$$\alpha+\beta+\alpha\beta\ge 0.$$

Проделывая вычисления в обратную сторону, получим неравенство (24).

Пусть тепрь $a=2+\alpha,\ b=2+\beta,\ c=2+\gamma,\ \alpha\ge 0,\ \beta\ge 0,\ \gamma\ge 0$. Подставляя эти значения в неравенство (25), получим

$$8+4\alpha+4\beta+4\gamma+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\alpha\beta\gamma\ge 8+\frac{4}{3}(\alpha+\beta+\gamma).$$

Откуда, в силу неотрицательности значений α,β и γ, следует верное равенство

$$\frac{8}{3}(\alpha+\beta+\gamma)+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\alpha\beta\gamma\ge 0.$$

Проделывая вычисления в обратную сторону, получим неравенство (25).

Полагая теперь $a = e^x, b = e^y, c = e^z$ и применяя неравенство (25) получим

$$\frac{e^x e^y e^z (x+y+z)^\sigma}{(e^x + e^y + e^z)^\sigma} \ge \left(\frac{3}{4}\right)^\sigma \frac{(x+y+z)^\sigma}{e^{(x+y+z)(\sigma-1)}}. \qquad (26)$$

Если $0 < \sigma \le 1$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{t^\sigma}{e^{t(\sigma-1)}} = +\infty$, тогда $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty \\ z\to+\infty}} \left(\frac{3}{4}\right)^\sigma \frac{(x+y+z)^\sigma}{e^{(x+y+z)(\sigma-1)}} = +\infty$. Из неравенства (26) в таком случае следует, что предел (22) равен

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty \\ z\to+\infty}} \frac{e^x e^y e^z (x+y+z)^\sigma}{(e^x + e^y + e^z)^\sigma} = +\infty, \quad 0 < \sigma \le 1.$$

Следовательно, ряд (21) расходится, когда $0 < \sigma \le 1$.

4. Заключение. Установлен признак Ермакова сходимости положительного тройного ряда с монотонно убывающими членами. Найдена его предельная форма, в том числе с использованием нижнего и верхнего предела. Приведён пример использования признака Ермакова для исследования тройного ряда на сходимость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ermakoff V.P. Caractère de convergence des sèries. – Bulletin des Science Mathématiques, 1871, T. 2, p. 250-256.

2. Ермаковъ В.П. Теорія сходимости безконечныхъ строкъ и опредѣленныхъ интеграловъ. Матем. сб., Т.6, Вып. 1, (1872), сс. 39–76.

3. Терещенко И.В. О признаке сходимости Ермакова. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2016. № 2. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/831.

4. Bromwich T.J.I. Introduction to the Theory of Infinite Series. – London: Macmillan and Com., 1908. – 511 p.

5. Fabry E. Théorie des séries a termes constants applications aux calculs numériques. – Paris: Hermann, 1910. – 198 p.

6. Knopp K. Theorie und anwendung der unendlichen reihen. – Berlin: Springer, 1922. – X+474 s.

7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 2. – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 864 с.

8. Терещенко И.В. Признак Ермакова сходимости положительного бесконечного двойного ряда с монотонно убывающими членами // Сб. трудов IV Международной научно-практической конференции «Автоматизированные информационные и электроэнергетические системы» [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГТУ, 2016. В печати.

9. Терещенко И.В. К теории бесконечных числовых тройных рядов. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2016. № 11, сс. 314 - 329. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/1212.

10. Воробьёв Н.Н. Теория рядов. 4-е изд., перераб. и допол. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. наук, 1979. – 408 с.

11. Гурса Э. Курс математического анализа. В 3 т. Т1, Ч.2. – М.-Л.: ГТТИ, 1933. – 235 с.

12. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3 т. Т 2. – М.: Дрофа, 2004. – 790 с.

13. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т1. 23-е изд. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. наук, 1974. – 479 с.

14. Теляковский С.А. Курс лекций по математическому анализу. Семестр III. 2-е изд. – М.: МИАН, 2013. – 242 с.

15. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т1. – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 680 с.

REFERENCES

1. Ermakoff V.P. Caractère de convergence des sèries. – Bulletin des Science Mathématiques, 1871, T. 2, p. 250-256.

2. Ermakov V.P. Teoriya skhodimosti bezkonechnykh strok i opredѣlennykh integralov. Matem. sb., T.6, Vyp. 1, (1872), ss. 39–76.

3. Tereshchenko I.V. O priznake skhodimosti Ermakova. [Elektronnyy resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2016. № 2. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/831.

4. Bromwich T.J.I. Introduction to the Theory of Infinite Series. – London: Macmillan and Com., 1908. – 511 p.

5. Fabry E. Théorie des séries a termes constants applications aux calculs numériques. – Paris: Hermann, 1910. – 198 p.

6. Knopp K. Theorie und anwendung der unendlichen reihen. – Berlin: Springer, 1922. – X+474 s.

7. Fikhtengolts G.M. Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya. V 3 t. T. 2. – 8-e izd. – M.: FIZMATLIT, 2003. – 864 s.

8. Tereshchenko I.V. Priznak Ermakova skhodimosti polozhitelnogo beskonechnogo dvoynogo ryada s monotonno ubyvayushchimi chlenami // Cb. trudov IV Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Avtomatizirovannye informatsionnye i elektroenergeticheskie sistemy» [Elektronnyy resurs]. – Krasnodar: KubGTU, 2016. V pechati.

9. Tereshchenko I.V. K teorii beskonechnykh chislovykh troynykh ryadov. [Elektronnyy resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2016. № 11, ss. 314 - 329. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/1212.

10. Vorobev N.N. Teoriya ryadov. 4-e izd., pererab. i dopol. – M.: Nauka, Gl. red. fiz.-mat. nauk, 1979. – 408 s.

11. Gursa E. Kurs matematicheskogo analiza. V 3 t. T1, Ch.2. – M.-L.: GTTI, 1933. – 235 s.

12. Kudryavtsev L.D. Kurs matematicheskogo analiza. V 3 t. T 2. – M.: Drofa, 2004. – 790 s.

13. Smirnov V.I. Kurs vysshey matematiki. T1. 23-e izd. – M.: Nauka, Gl. red. fiz.-mat. nauk, 1974. – 479 s.

14. Telyakovskiy S.A. Kurs lektsiy po matematicheskomu analizu. Semestr III. 2-e izd. – M.: MIAN, 2013. – 242 s.

15. Fikhtengolts G.M. Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya. V 3 t. T1. – 8-e izd. – M.: FIZMATLIT, 2003. – 680 s.

ERMARKOFF'S TEST OF THE CONVERGENCE OF A POSITIVE TRIPLE SERIES WITH MONOTONE DECREASING TERMS

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350002;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

Ermakoff's test for the ordinary infinite series is presented. Its formulation in the form of a limit, including the use of the upper and lower limit is given. The basic notions of the theory of triple series are presented. For the first time the proof of Ermakoff's test for the positive triple series is given. This proof is similar to the proof of Ermakoff's test for the ordinary series and is based on the use of the integral test for the convergence of triple series. The formulation in the form of a limit for Ermarkoff's test for triple series is considered and proved. An example of the use of this test is given.

Key words: infinite triple series, a positive infinite triple series, Ermarkoff's test, Ermarkoff's test for double series, Ermarkoff's test for triple series.