УДК 517.521

О ВЫЧИСЛЕНИИ СУММ РЯДОВ ОБРАТНЫХ ЧЁТНЫХ СТЕПЕНЕЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ПОКАЗАТЕЛЯМИ СТЕПЕНИ ОТ ЧЕТЫРЕХ ДО ВОСЬМИ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ РЯДОВ В ТЕЛЕСКОПИЧЕСКИЕ РЯДЫ

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

Рассмотрена история базельской задачи, которая первоначальна была изложена в предисловии к книге Пиетро Менголи «Новые арифметические квадратуры, или о сложении дробей» в 1650 году. Указано, что Менголи использовал в своей книге особую символику и специфическую терминологию, которые были непонятны его современникам. По этой причине работы Менголи не оказали ни какого влияния на решение этой проблемы и в связи с этим, нет ничего удивительного в том, что независимо от Менголи к Базельской задаче в 1656 году пришёл Валлис. Начиная с работы японского математика Йощио Матсуока 1961 года были предложены доказательства базельской задачи, сводящие её к вычислению суммы некоторого телескопического ряда. Одно из таких доказательств было приведено в работе американского математика Давида Бенко 2012 года. В нашей работе подход Давида Бенко используется для вычисления сумм рядов обратных чётных степеней натуральных чисел с показателями степени от четырех до восьми с преобразованием рядов в телескопические ряды.

Ключевые слова: Базельская задача, бесконечный числовой ряд, сумма ряда обратных квадратов, телескопический ряд, лемма Римана - Лебега.

Базельской задачей [1, 2] называется задача вычисления суммы ряда обратных квадратов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \tag{1}$$

История возникновения этой задачи ещё не до конца выяснена. Однако большинство современных математиков считает, что её автором является профессор математики Болонского университета Пьетро Менголи (1626 – 1686). Поэтому задачу следовало бы назвать Болонской задачей.

Сам Менголи пользовался особой символикой и специфической терминологией, незнание которой очень сильно затрудняло чтение его трудов и делало фактически невозможным понимание их даже специалистом математиком. По этой причине его открытия не были поняты современниками, и его имя было незаслуженно забыто на долгое время. Вот что, например, писал о Менголи во 2-м томе 2-го издания «Истории математики» французский историк математики Жан-Этьенн Монтюкла [3, p. 92] (перевод с французского сделан автором, как и все другие переводы, приведённые ниже):

“*Je n'ai que quelques mots à dire de Mengoli, professeur de mathemématiques à Bologne. Si l'ou en juge par les titres de ses divers ouvrages, il tâcha de servir la géometrie dans ce qu'elle a de plus difficile et relevé. Il y a meme pent - être dans ses ouvrages des choses neuves; mais il semble avoir voule s'envelopper dans un langage particulier à lui. Son nom a resté dans l'onbli, et il l'a mérite*”.

«*Скажем несколько слов о Менголи, профессоре математики в Болонье. Если судить по названиям его различных трудов, он пытался использовать геометрию в вопросах, которые являются самыми трудными или выше средней сложности. В его трудах даже могут быть новые вещи, но он, похоже, хотел выразиться иносказательно на языке, свойственном ему. Его имя осталось забытым, и он заслужил это*».

Лишь начиная со второй декады XX века имя Менголи было восстановлено в истории математики, а его труды были вновь изучены. Из этих исследований стало известно [4], что в 1650 году Менголи включил задачу о вычислении суммы (1) во введение к своей книге «Новые арифметические квадратуры, или о сложении дробей» [5]. Хотя сумму ряда он не смог найти, он заметил, что ряд (1) имеет «конечную протяжённость», то есть ряд сходится [3].

Следует сказать, что не все математики согласны, что датой возникновения базельской задачи является 1650 год. Например, американский историк математики Уильям Дунхэм без всяких на то оснований утверждает [6, p. XXII], что Менголи безуспешно пытался вычислить сумму ряда (1) ещё в 1644 году. Многие современные математики согласны с ним. Их даже не смущает тот факт, что Менголи тогда было всего лишь 18 лет!

Невыясненным до конца остаётся вопрос о том, как быстро другие математики, в том числе современники Менголи, заинтересовались задачей суммирования ряда (1). Оказали ли работы Менголи на них хоть какое-нибудь влияние? Американский математик Раймонд Аюб, отвечая на эти вопросы, утверждал [7], что вскоре после выхода книги Менголи «Новые арифметические квадратуры, или о сложении дробей» [5] под влиянием Менголи или скорее независимо от него о задаче (1) узнали во Франции и в Англии. В доказательство своей правоты он ссылается на книгу английского математика Джона Валлиса “Арифметика бесконечных”[8], изданную в 1656 году [7]:

“*In fact*, *the English mathematician John Wallis* (1616-1703), *professor at Oxford*, *commented on the problem in* 1655 *in his book* ‘*Arithmetica Infinitorum*’. *He had computed the value of* $\zeta(2)$ *to* 3 *decimal places but it does not appear that he recognized this value*, 1.645, *as being about* $\pi^2/6$”.

«*Фактически*, *английский математик Джон Валлис* (1616-1703), *профессор в Оксфорде*, *прокомментировал задачу в* 1655 *году в своей книге* «*Арифметика бесконечного*». *Он вычислил значение* $\zeta(2)$ *до 3 знаков после запятой*, *но*, *не похоже*, *чтобы он признал это значение*, 1,645, как примерно равное $\pi^2/6$».

На наш взгляд, это высказывания Аюба ошибочны. Книга Валлиса [8], написанная на латыни, как и книга Менголи [5], в отличие от последней получила широкое признание. Имеются её переводы на английский язык, например перевод, выполненный А. Стедаллом [9]. Во введении, написанном Стедаллом, на странице XV говориться о том, что

”Wallis never read Cavalieri's books, which were almost impossible to obtain, but instead learned of his work at second hand from the more easily available Opera of Torricelli”.

«*Валлис никогда не читал книг Кавальери, которые почти невозможно было достать, но вместо этого изучал его труды из вторых рук из более доступных трудов Торричелли*».

Если Валлис не мог достать книг Кавальери, труды которого были широко известны, то чего уж говорить о почти не понятных книгах его ученика Менголи.

Ни какого комментария к задаче (1) Валлис не давал. Он рассматривал «арифметизацию» метода неделимых Кавальери и в Предложении №87 ввёл ряды, подобные ряду (1). В своей книге [8, 9] он не исследовал ряд (1) на сходимость и не пытался вычислить приближённо его сумму.

Итак, Валлис не знал о работах Менголи и они не могли заинтересовать европейских математиков задачей о суммировании ряда (1) и остались для них неизвестными.

После Валлиса задачей (1) заинтересовался Готфрид Лейбниц (1646 - 1716). В 1673 году он обсуждает её в письме к Якобу Бернулли (1655 - 1705) [7]. В этом письме Лейбниц получает разложения

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...=\int\frac{\ln(1-x)}{x}dx \text{ и } x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...=\int\frac{\ln(1+x)}{x}dx,$$

но сумму ряда он так и не находит. Наконец, в 1689 году Якоб Бернулли в своей книге «Арифметические предложения о бесконечных рядах» обратил внимание европейских математикам на эту задачу: «*Если кому-либо удастся найти то, что до сих пор не поддавалось нашим усилиям, и если он сообщит это нам, то мы будем очень ему обязаны*» [10, 11 с. 40]. Но при жизни Якоба Бернулли решение так и не появилось. Поскольку родным городом Якоба Бернулли был швейцарский город Базель, то задача в дальнейшем получила название базельской задачи или базельской проблемы.

Многие выдающиеся европейские математики, такие как Лейбниц, Якоб Бернулли и его младший брат Иоганн Бернулли, Стирлинг, де Муавр и другие безуспешно пытались найти сумму ряда (1). Впервые это удалось сделать гениальному математику, ученику Иоганна Бернулли, Леонарду Эйлеру. В 1734 году он вычислил сумму ряда (1) и сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}. \qquad (2)$$

Эйлер сообщил об этом открытии в письме к Даниилу Бернулли (1700 - 1782) – сыну Иоганна Бернулли [7] и в заметке «О суммах обратных рядов» для журнала Петербургской академии наук [12]. Заметка была зачитана на собрании Петербургской академии наук 5 декабря 1735 года.

Простейшим телескопический рядом является ряд обратных треугольных чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=2. \qquad (3)$$

Ещё П. Менголи доказал, что ряд (3) сходится [5] и вычислил его сумму. Действительно, так как $1/n(n+1)=1/n-1/(n+1)$, то

$$\sum_{n=1}^{M}\frac{2}{n(n+1)}=2\left(1-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+2\left(\frac{1}{M}-\frac{1}{M+1}\right)=2-\frac{2}{M+1}.$$

Устремляя $M\to\infty$, получим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$. Тот же результат через 40 лет получил Якоб Бернулли [10]. Используя оценку

$$\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n^2}\le 1+\sum_{n=2}^{M}\frac{1}{(n-1)n}=1+1-\frac{1}{M}<2$$

Якоб Бернулли [10] установил сходимость ряда обратных квадратов (1). Впрочем, и тут его на 40 лет опередил Менголи [5].

Японский математик Йошина Матсуока [13] первым сумел свести ряд (1) к телескопическому ряду. Его метод был значительно упрощён Даниэлем Веллеманом [14]. Альтернативный вариант сведения ряда (1) к телескопическому ряду был предложен Давидом Бенко [15].

Вычисление суммы ряда (2) сведением его к телескопическому ряду. Покажем, развивая идею Д. Бенко, что ряд (2) можно свести к телескопическому ряду. Выполним стандартное преобразование ряда (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}+\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{16}{15}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}. \tag{4}$$

Покажем, что последний ряд является телескопическим рядом.

Рассмотрим многочлен 3-й степени $P_3(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, удовлетворяющий условиям $P_3(0)=0$, $P_3'(0)=0$ и $P_3'(\pi)=0$. Из первых двух равенств получим, что $c=d=0$. Отсюда находим $P_3'(x)=3ax^2+2bx$, а из условия $P_3'(\pi)=0$ находим, что $b=-\frac{3}{2}a\pi$. Положим $a=2$, тогда $P_3'(x)=6x^2-6x\pi$. Интегрируя $P_3'(x)$ с учётом условия $P(0)=0$, получим

$$P_3(x)=\int_0^x P_3'(t)dt=2x^3-3\pi x^2. \tag{5}$$

и значение третьей производной $P_3'''(x)=12$.

Пусть m – натуральное число. Интегрируя трижды по частям, получим

$$\int_0^{\pi}P_3(x)\cos(2m-1)xdx=\int_0^{\pi}\frac{P_3(x)d\sin(2m-1)x}{2m-1}=-\int_0^{\pi}\frac{\sin(2m-1)P_3'(x)dx}{2m-1}=$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{P_3'(x)d\cos(2m-1)}{(2m-1)^2}=-\int_0^{\pi}\frac{\cos(2m-1)P_3''(x)dx}{(2m-1)^2}=-\int_0^{\pi}\frac{P_3''(x)d\sin(2m-1)}{(2m-1)^3}=$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2m-1)P_3'''(x)dx}{(2m-1)^3}=-12\int_0^{\pi}\frac{d\cos(2m-1)}{(2m-1)^4}=\frac{24}{(2m-1)^4}. \tag{6}$$

Воспользуемся теперь тригонометрическим тождеством

$$\cos((2m-1)x)=\frac{\sin(2m-1/2)x-\sin(2m-3/2)x}{2\sin(x/2)} \tag{7}$$

и подставим его в интеграл (6). Тогда получим

$$\int_0^{\pi} P_3(x)\frac{\sin((2m-1/2)x)}{48\sin(x/2)}dx-\int_0^{\pi} P_3(x)\frac{\sin((2m-3/2)x)}{48\sin(x/2)}dx=\frac{1}{(2m-1)^4}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{(2m-1)^4}=\sum_{m=1}^{M}\left(\int_0^{\pi} P_3(x)\frac{\sin((2m-1/2)x)}{48\sin(x/2)}dx-\int_0^{\pi} P_3(x)\frac{\sin((2m-3/2)x)}{48\sin(x/2)}dx\right).$$

Сумма справа телескопическая, поэтому

$$\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{(2m-1)^4}=\int_0^{\pi} P_3(x)\frac{\sin((2M-1/2)x)}{48\sin(x/2)}dx-\int_0^{\pi}\frac{P_3(x)}{48}dx, \tag{8}$$

где $\int_0^{\pi}\frac{P_3(x)}{48}dx=\int_0^{\pi}\frac{2x^3-3\pi x^2}{48}dx=-\frac{\pi^4}{96}$. Подставляя в (8), получим

$$\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{(2m-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}+\int_0^{\pi} P_3(x)\frac{\sin((2M-1/2)x)}{48\sin(x/2)}dx. \tag{9}$$

Так как функция $\frac{P_3(x)}{\sin(x/2)}$ непрерывна на отрезке $[0,\pi]$, то из леммы Римана – Лебега [16, с. 384] следует, что

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^{\pi} P_3(x)\frac{\sin((2M-1/2)x)}{48\sin(x/2)}dx=0.$$

Тогда $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^4}=\lim_{M\to\infty}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{(2m-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$ и из (4) получим (1).

Вычисление суммы обратных шестых степеней натуральных чисел преобразованием в телескопический ряд. Теперь мы покажем, что аналогичным образом можно найти сумму ряда обратных шестых степеней

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}. \tag{10}$$

Сумма (10) впервые была найдена Леонардом Эйлером в 1734 году, но заметка об этом была опубликована лишь в 1740 году в статье «*О суммах обратных рядов*» в журнале Петербургской академии наук [12].

Выполним стандартное преобразование ряда (10)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}+\frac{1}{64}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{64}{63}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}. \qquad (11)$$

Покажем, что последний ряд является телескопическим рядом. Пусть $P_5(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$ является многочленом 5-й степени, удовлетворяющим условиям $P_5(0)=0$, $P_5'(0)=0$, $P_5'''(0)=0$ и $P_5'(\pi)=0$, $P_5'''(\pi)=0$. Из первых двух равенств получим, что $e=f=0$. Тогда $P_5(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2$. Отсюда находим

$$P_3'(x)=5ax^4+4bx^3+3cx^2+2dx,\ \ P_3''(x)=20ax^3+12bx^2+6cx+2d,$$

$$P_3'''(x)=60ax^2+24bx+6c.$$

Из условия $P'''(0)=0$ находим, что $c=0$. Отсюда

$$P_5(x)=ax^5+bx^4+dx^2,\ P_5'(x)=5ax^4+4bx^3+2dx,$$

$$P_3''(x)=20ax^3+12bx^2+2d,\ P_3'''(x)=60ax^2+24bx.$$

Из условия $P_5'''(\pi)=0$ находим, что $b=-\frac{5}{2}\pi a$. Положим $a=2$, тогда $P_3'(x)=10x^4-20\pi x^3+2dx$. Из условия $P_5'(\pi)=0$ находим, что

$$P_3'(\pi)=10\pi^4-20\pi^4+2d\pi=0 \text{ или } d=5\pi^3.$$

Итак, $P_5(x)=2x^5-5\pi x^4+5\pi^3x^2$ и $P_5^{(5)}(x)=240$.

Пусть m – натуральное число. Интегрируя пять раз по частям, получим

$$\int_0^\pi P_5(x)\cos(2m-1)x\,dx=\int_0^\pi \frac{P_5(x)d\sin(2m-1)x}{2m-1}=-\int_0^\pi \frac{\sin(2m-1)P_5'(x)dx}{2m-1}=$$

$$=\int_0^\pi \frac{P_5'(x)d\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}=-\int_0^\pi \frac{\cos(2m-1)xP_5''(x)dx}{(2m-1)^2}=-\int_0^\pi \frac{P_5''(x)d\sin(2m-1)x}{(2m-1)^3}=$$

$$=\int_0^\pi \frac{\sin(2m-1)P_5'''(x)dx}{(2m-1)^3}=-\int_0^\pi \frac{P_5'''(x)d\cos(2m-1)x}{(2m-1)^4}=-\int_0^\pi \frac{P_5^{(4)}(x)\cos(2m-1)x\,dx}{(2m-1)^4}=$$

$$=-\int_0^\pi \frac{P_5^{(4)}(x)d\sin(2m-1)x}{(2m-1)^5}=P_5^{(5)}(x)\int_0^\pi \frac{\sin(2m-1)xd}{(2m-1)^5}=-\frac{480}{(2m-1)^6}. \qquad (12)$$

Воспользуемся теперь тригонометрическим тождеством (7) и подставим его в интеграл (12). Тогда получим

$$\int_0^\pi P_5(x)\frac{\sin((2m-1/2)x)}{960\sin(x/2)}dx-\int_0^\pi P_5(x)\frac{\sin((2m-3/2)x)}{960\sin(x/2)}dx=-\frac{1}{(2m-1)^6}.$$

Отсюда следует, что

$$-\sum_{m=1}^M\frac{1}{(2m-1)^6}=\sum_{m=1}^M\left(\int_0^\pi P_5(x)\frac{\sin((2m-1/2)x)}{960\sin(x/2)}dx-\int_0^\pi P_5(x)\frac{\sin((2m-3/2)x)}{960\sin(x/2)}dx\right).$$

Сумма справа телескопическая, поэтому

$$-\sum_{m=1}^M\frac{1}{(2m-1)^6}=\int_0^\pi P_5(x)\frac{\sin((2M-1/2)x)}{960\sin(x/2)}dx-\int_0^\pi \frac{P_5(x)}{960}dx. \qquad (13)$$

Так как $\int_0^\pi \frac{P_5(x)}{960}dx=\int_0^\pi \frac{2x^5-5\pi x^4+5\pi^3x^2}{960}dx=\frac{\pi^6}{960}$, то, подставляя в (13), получим

$$\sum_{m=1}^M\frac{1}{(2m-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}+\int_0^\pi P_5(x)\frac{\sin((2M-1/2)x)}{960\sin(x/2)}dx. \qquad (14)$$

Так как функция $\dfrac{P_5(x)}{\sin(x/2)}$ непрерывна на отрезке $[0, \pi]$, то из леммы Римана – Лебега [16, с. 384] следует, что

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^{\pi} P_5(x)\frac{\sin((2M-1/2)x)}{960\sin(x/2)}dx = 0 .$$

Тогда $\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2m-1)^6} = \lim_{M\to\infty}\sum_{m=1}^{M}\dfrac{1}{(2m-1)^6} = \dfrac{\pi^6}{960}$ и из формулы (4) получим формулу (10).

Вычисление суммы обратных восьмых степеней натуральных чисел преобразованием в телескопический ряд. Покажем, что аналогичным образом можно найти сумму ряда обратных восьмых степеней

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450} . \qquad (15)$$

Сумма (15) впервые была найдена Леонардом Эйлером в 1734 году, но заметка об этом была опубликована лишь в 1740 году в статье «*О суммах обратных рядов*» в журнале Петербургской академии наук [12].

Выполним стандартное преобразование ряда (15)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^8} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^8} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^8} + \frac{1}{256}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8} .$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8} = \frac{256}{255}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^8} . \qquad (16)$$

Покажем, что последний ряд является телескопическим рядом. Пусть $P_7(x) = ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h$ является многочленом 7-й степени, удовлетворяющим условиям $P_7(0) = 0$, $P_7'(0) = 0$, $P_7^{(3)}(0) = 0$, $P_7^{(5)}(0) = 0$ и $P_7'(\pi) = 0$, $P_7^{(3)}(\pi) = 0$, $P_7^{(5)}(\pi) = 0$. Из первых двух равенств получим, что $g = h = 0$. Тогда $P_7(x) = ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2$. Отсюда находим

$$P_7'(x) = 7ax^6 + 6bx^5 + 5cx^4 + 4dx^3 + 3ex^2 + 2fx,$$

$$P_7''(x) = 42ax^5 + 30bx^4 + 20cx^3 + 12dx^2 + 6ex + 2f,$$

$$P_7^{(3)}(x) = 210ax^4 + 120bx^3 + 60cx^2 + 24dx + 6e.$$

Из условия $P_7^{(3)}(0) = 0$ находим, что $e = 0$. Отсюда

$$P_7(x) = ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + fx^2,\ P_7'(x) = 7ax^6 + 6bx^5 + 5cx^4 + 4dx^3 + 2fx,$$

$$P_7''(x) = 42ax^5 + 30bx^4 + 20cx^3 + 12dx^2 + 2f,$$

$$P_7^{(3)}(x) = 210ax^4 + 120bx^3 + 60cx^2 + 24dx,$$

$$P_7^{(4)}(x) = 840ax^3 + 360bx^2 + 120cx + 24d,\ P_7^{(5)}(x) = 2520ax^2 + 720bx + 120c.$$

Из условия $P_7^{(5)}(x) = 0$ находим, что $c = 0$. Отсюда

$$P_7(x) = ax^7 + bx^6 + dx^4 + fx^2,\ P_7'(x) = 7ax^6 + 6bx^5 + 4dx^3 + 2fx,$$

$$P_7''(x) = 42ax^5 + 30bx^4 + 12dx^2 + 2f,\ P_7^{(3)}(x) = 210ax^4 + 120bx^3 + 24dx,$$

$$P_7^{(4)}(x) = 840ax^3 + 360bx^2 + 24d,\ P_7^{(5)}(x) = 2520ax^2 + 720bx.$$

Из условия $P_7^{(5)}(\pi) = 0$ находим, что $b = -\frac{7}{2}\pi a$. Положим $a = 2$, тогда $P_7^{(3)}(x) = 420x^4 - 840\pi x^3 + 24dx$. Из условия $P_7^{(3)}(\pi) = 0$ находим, что

$P_7^{(3)}(\pi) = 420\pi^4 - 840\pi^4 + 24d\pi = 0$ или $d = \frac{35}{2}\pi^3$. Отсюда

$$P_7'(x) = 14x^6 - 42\pi x^5 + 70\pi^3 x^3 + 2fx.$$

Из условия $P_7'(\pi) = 0$ находим, что

$$P_7'(\pi) = 14\pi^6 - 42\pi^6 + 70\pi^6 + 2f\pi = 0 \text{ или } f = -21\pi^5.$$

Итак, $P_7(x) = 2x^7 - 7\pi x^6 + \frac{35}{2}\pi^3 x^4 - 21\pi^5 x^2$ и $P_7^{(7)}(x) = 2 \cdot 7! = 10080$.

Пусть m – натуральное число. Интегрируя семь раз по частям, получим

$$\int_0^\pi P_7(x)\cos(2m-1)x dx = \int_0^\pi \frac{P_7(x)d\sin(2m-1)x}{2m-1} = \int_0^\pi \frac{P_7'(x)d\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2} =$$

$$= -\int_0^\pi \frac{P_7''(x)d\sin(2m-1)x}{(2m-1)^3} = -\int_0^\pi \frac{P_7^{(3)}(x)d\cos(2m-1)x}{(2m-1)^4} = \int_0^\pi \frac{P_7^{(4)}(x)d\sin(2m-1)x}{(2m-1)^5} =$$

$$= \int_0^\pi \frac{P_7^{(5)}(x)d\cos(2m-1)x}{(2m-1)^6} = -\int_0^\pi \frac{P_7^{(6)}(x)d\sin(2m-1)x}{(2m-1)^7} =$$

$$= P_7^{(7)}(x)\int_0^\pi \frac{\sin(2m-1)xdx}{(2m-1)^7} = \frac{2\cdot P_7^{(7)}}{(2m-1)^8}. \tag{17}$$

Воспользуемся теперь тригонометрическим тождеством (7) и подставим его в интеграл (17). Тогда получим

$$\int_0^\pi P_7(x)\frac{\sin((2m-1/2)x)}{2\sin(x/2)}dx - \int_0^\pi P_7(x)\frac{\sin((2m-3/2)x)}{2\sin(x/2)}dx = \frac{2\cdot P_7^{(7)}(x)}{(2m-1)^8}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{m=1}^M \frac{2\cdot P_7^{(7)}(x)}{(2m-1)^8} = \sum_{m=1}^M\left(\int_0^\pi P_7(x)\frac{\sin((2m-1/2)x)}{2\sin(x/2)}dx - \int_0^\pi P_7(x)\frac{\sin((2m-3/2)x)}{2\sin(x/2)}dx\right).$$

Сумма справа телескопическая, поэтому

$$\sum_{m=1}^M \frac{2\cdot P_7^{(7)}(x)}{(2m-1)^8} = \int_0^\pi P_7(x)\frac{\sin((2M-1/2)x)}{2\sin(x/2)}dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi P_7(x)dx. \tag{18}$$

Так как $\int_0^\pi P_7(x)dx = \int_0^\pi\left(2x^7 - 7\pi x^6 + \frac{35}{2}\pi^3x^4 - 21\pi^5x^2\right)dx = -\frac{17\pi^8}{4}$, то, подставляя в (18), получим

$$\sum_{m=1}^M \frac{2\cdot P_7^{(7)}(x)}{(2m-1)^8} = \frac{17\pi^8}{8} + \int_0^\pi P_7(x)\frac{\sin((2M-1/2)x)}{2\sin(x/2)}dx. \tag{19}$$

Так как функция $\frac{P_7(x)}{\sin(x/2)}$ непрерывна на отрезке $[0,\pi]$, то из леммы Римана – Лебега [16, с. 384] следует, что

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^\pi P_7(x)\frac{\sin((2M-1/2)x)}{2\sin(x/2)}dx=0.$$

Тогда $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^8}=\lim_{M\to\infty}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{(2m-1)^8}=\frac{17\pi^8}{16\cdot P_7^{(7)}(x)}$ и из формулы $P_7^{(7)}(x)=10080$ получим

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^8}=\frac{17\pi^8}{32\cdot 5040}.$$

Из формулы (16) получим формулу (15)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}=\frac{256}{255}\cdot\frac{17\pi^8}{32\cdot 5040}=\frac{\pi^8}{9450}.$$

Сумма рядов обратных четвёртых, шестых и восьмых степеней впервые найдена преобразованием ряда в телескопический ряд усовершенствованным методом Д. Бенко [15]. Автор надеется в дальнейшем получить указанным методом общую формулу $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2n}}=\frac{(2\pi)^{2n}|B_{2n}|}{2\cdot(2n)!}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Терещенко И.В. Базельская задача I. Метод Коши и его обобщение для вычисления сумм чисел обратных четвёртой степени. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2014. № 2. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/41.

2. Терещенко И.В. Базельская Задача II. Метод Братьев Яглом и его обобщение для решения обобщённой Базельской задачи в случае четного показателя, равного четырём, шести, восьми и десяти. [Электронный ресурс] //

Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2014. № 3. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/82.

3. Montucla J.F. Histoire des Mathématiques. Tome 2. Nouvelle edition. - Paris, Chez Agasse, 1799. – 750 p.

4. Паплаускас А.Б. Доньютоновский период развития теории бесконечных ряд. II. П. Менголи. – Сб. Истор.-мат. исслед., 1974, вып. 19, 143 - 157.

5. Petri Mengoli. Novae quadraturae arithmetica, seu De additione fractionum. – Bononiae, ex typographia Iacobi Montij, 1650.

6. Dunham W. Euler: The Master of Us All. MAA, 1999. – 185 p.

7. Ayoub R. Euler and the Zeta Function. Amer. Math. Monthly. 1974. Vol. 81, No. 10, pp. 1067-1086.

8. Wallis J. Arithmetica infintorum. Oxford, 1656.

9. Wallis J. The Arithmetic of Infinitesimals. 1656. Translated in English by A. Stedall, Springer, 2004. – p. 192.

10. Bernoulli J. Ars conjectandi, opus posthumum. Accedit Tractatus de seriebus infinitis, et epistola gallicé scripta de ludo pilae reticularis. – Basel, Thurneysen Brothers, 1713.

11. Пойа Дж. Математика и правдоподобные рассуждения. 2-е изд., испр. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. – 464 с.

12. Euler Leonhard De summis serierum reciprocarum. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **7** (1734/1735), 1740, 123-134.

13. Matsuoka Y. An Elementary Proof of the Formula $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$. Amer. Math. Mon., Vol. 68, No. 5 (May, 1961), pp. 485-487.

14. Velleman D.J. An Elementary Proof for Euler's Series. Amer. Math. Monthly, Vol. 123, No. 1, Jan 2016, p. 77.

15. Benko D. The Basil Problem as a Telescoping Series. Amer. Math. Monthly. 2012. Vol. 43, No 3, - pp. 244 – 250.

16. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Математический анализ. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литер., 1984. – 448 с.

REFERENCES

1. Tereshhenko I.V. Bazel'skaya zadacha I. Metod Koshi i ego obobshhenie dlya vychisleniya summ chisel obratnykh chetvyortoj stepeni. [EHlektronnyj resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: ehlektron. setevoj politematich. zhurn. 2014. № 2. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/41.

2. Tereshhenko I.V. Bazel'skaya Zadacha II. Metod Brat'ev YAglom i ego obobshhenie dlya resheniya obobshhyonnoj Bazel'skoj zadachi v sluchae chetnogo pokazatelya, ravnogo chetyryom, shesti, vos'mi i desyati. [EHlektronnyj resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: ehlektron. setevoj politematich. zhurn. 2014. № 3. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/82.

3. Montucla J.F. Histoire des Mathématiques. Tome 2. Nouvelle edition. - Paris, Chez Agasse, 1799. – 750 p.

4. Paplauskas A.B. Don'yutonovskij period razvitiya teorii beskonechnykh ryad. II. P. Mengoli. – Sb. Istor.-mat. issled., 1974, vyp. 19, 143 157.

5. Petri Mengoli. Novae quadraturae arithmetica, seu De additione fractionum. – Bononiae, ex typographia Iacobi Montij, 1650.

6. Dunham W. Euler: The Master of Us All. MAA, 1999. – 185 p.

7. Ayoub R. Euler and the Zeta Function. Amer. Math. Monthly. 1974. Vol. 81, No. 10, pp. 1067-1086.

8. Wallis J. Arithmetica infintorum. Oxford, 1656.

9. Wallis J. The Arithmetic of Infinitesimals. 1656. Translated in English by A. Stedall, Springer, 2004. – p. 192.

10. Bernoulli J. Ars conjectandi, opus posthumum. Accedit Tractatus de seriebus infinitis, et epistola gallicé scripta de ludo pilae reticularis. – Basel, Thurneysen Brothers, 1713.

11. Poja Dzh. Matematika i pravdopodobnye rassuzhdeniya. 2-e izd., ispr. M.: Nauka, Gl. red. fiz.-mat. lit., 1975. – 464 s.

12. Euler Leonhard De summis serierum reciprocarum. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **7** (1734/1735), 1740, 123-134.

13. Matsuoka Y. An Elementary Proof of the Formula $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$. Amer. Math. Mon., Vol. 68, No. 5 (May, 1961), pp. 485-487.

14. Velleman D.J. An Elementary Proof for Euler's Series. Amer. Math. Monthly, Vol. 123, No. 1, Jan 2016, p. 77.

15. Benko D. The Basil Problem as a Telescoping Series. Amer. Math. Monthly. 2012. Vol. 43, No 3, - pp. 244 – 250.

16. Kartashev A.P., Rozhdestvenskij B.L. Matematicheskij analiz. M.: Nauka, Gl. red. fiz.-mat. liter., 1984. – 448 s.

THE SUMMATION OF INFINITE SERIES OF THE RECIPROCALS OF THE EVEN POWERS OF THE NATURAL NUMBERS WITH EXPONENTS FROM FOUR TO EIGHT WITH TRANSFORMATION OF SERIES INTO TELESCOPIC SERIES

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

The history of the Basel problem, which was originally described in the preface to Pietro Mengoli's book "New arithmetic quadratures, or the addition of fractions" in 1650, is considered. It is pointed out that Mengoli used in his book a special symbolism and specific terminology that were not understandable to his contemporaries. For this reason, the work of Mengoli did not have any influence on the solution of this problem and in this connection, it is not surprising in the fact that independently of Mengoli Wallis came to the Basel problem in 1656. Starting with the work of the Japanese mathematician Yoshchio Matsuoka in 1961, the proofs of the Basel problem were proposed, reducing it to calculating the sum of some telescopic series. One such proof was given in the work of the American mathematician David Benko in 2012. In our work, David Benko's approach is used for the summation of infinite series of the reciprocals of the even powers of the natural numbers with exponents from four to eight with series' transformation into telescopic series.

Keywords: Basel problem, infinite series, sum of the reciprocals of the squares of the natural numbers, a telescopic series, Riemann-Lebesgue lemma