УДК 530.1; 539.1

КЛАССИЧЕСКИЕ НАБЛЮДАЕМЫЕ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ

А.В. БРАТЧИКОВ

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: bratchikov@kubstu.ru

Найдены явные выражения для классических наблюдаемых в системе со связями первого рода в лагранжевом формализме. Рассматриваются формулировки теории с фиксацией и без фиксации калибровки.
Ключевые слова: калибровочные теории; Лагранжев формализм; наблюдаемые.

1. Введение. Рассмотрим классическую систему, конфигурации которой задаются набором обобщённых вещественных координат $q^a, a = 1,...,n$, а динамика описывается действием $S(q)$, которое инвариантно относительно калибровочных преобразований с генераторами $R^a_\beta(q), \beta = 1,...,m,$

$$\frac{\delta S}{\delta q^a} R^a_\beta = 0$$

Уравнения движения системы записываются в виде

$$\frac{\delta S}{\delta q^a} = 0 \tag{1}$$

Физические функционалы $F^\phi(q)$ определяются условием [1]

$$\frac{\delta F^\phi}{\delta q^a} R^a_\beta \sim 0,$$

где символ ~ означает равенство на уравнениях движения (1). Пусть P - алгебра физических функционалов и пусть I - подалгебра физических функционалов исчезающих на уравнениях движения. Элементы фактор-алгебры P/I называются наблюдаемыми. Цель настоящей работы состоит в нахождении явного выражения элементов алгебры P.

Введём набор функционалов $U = (U_\alpha(q))$, таких что матрица

$$D(U)_{\alpha\beta} = \frac{\delta U_\alpha}{\delta q_\alpha} R^\alpha_\beta$$

обратима. Предположим, что существуют функционалы $M_i, i = m+1,...,n$, такие что (U_α, M_i) можно выбрать в качестве локальных координат.

Рассмотрим уравнения вида

$$\frac{\delta S}{\delta q} = 0,\ U = 0. \qquad (2)$$

Эти уравнения получаются варьированием действия $S^* = S + \mu_\alpha U_\alpha$. Действие S^* не обладает калибровочной инвариантностью. Поэтому любой функционал $F(q)$ является физическим. Наблюдаемыми в системе с действием S^* будут элементы фактор-алгебры A/Φ, где A - алгебра всех функционалов, а Φ - подалгебра функционалов исчезающих на уравнениях движения (2).

Динамическая эквивалентность теорий базирующихся на уравнениях (1) и (2) хорошо известна [1]. Полученное нами явное выражение для элементов алгебры P даёт возможность доказать изоморфизм P/I и A/Φ. Тем самым устанавливается алгебраическая эквивалентность теорий (1) и (2). Некоторые реализации наблюдаемых калибровочных теорий в гамильтоновом формализме рассматривались в [2].

2. Реализации наблюдаемых.

Чтобы найти выражение для элементов алгебры P рассмотрим уравнение

$$\frac{\delta F}{\delta q^\alpha} R^\alpha_\beta \in I \qquad (3)$$

с граничным условием

$$F \in \{F_0\}, \qquad (4)$$

где $\{F_0\} \in A/\Phi$ обозначает класс эквивалентности представляемый $F_0 \in A$.

В силу (4), можно записать

$$F = F_0 + r_a \frac{\delta S}{\delta q^a} + s_\alpha U_\alpha \qquad (5)$$

где $r_a(q)$ и $s_\alpha(q)$ некоторые функции. Подставляя (5) в (3) получим

$$\frac{\delta F_0}{\delta q^a} R^a_\beta + \frac{\delta s_\alpha}{\delta q^a} R^a_\beta U_\alpha + s_\alpha D_{\alpha\beta} \in I,$$

или, эквивалентно,

$$v_\alpha + (Bs)_\alpha \in I. \tag{6}$$

Здесь

$$v_\alpha = \frac{\delta F_0}{\delta q^a} R^a_\beta D^{-1}_{\beta\alpha},\ (Bs)_\alpha = s_\alpha + (\Delta s)_\alpha,\ (\Delta s)_\alpha = \frac{\delta s_\gamma}{\delta q^a} R^a_\beta U_\gamma D^{-1}_{\beta\alpha}.$$

Заметим, что матрица B обратима. Обратная матрица B^{-1} может быть получена в виде формального ряда по U_α Если $u \in I$ то $\Delta u \in I$ и, следовательно, $B^{-1}u \in I$. Из (6) следует

$$s_\alpha = -\left(B^{-1}v\right)_\alpha + s_{\alpha a}\frac{\delta S}{\delta q^a},$$

где $s_{\alpha a}(q)$ некоторые функции. Таким образом, для любого функционала $\{F_0\} \in A$ множество $\{F_0\} \cap P$ состоит из всех выражений вида

$$F = R(F_0) + r_a \frac{\delta S}{\delta q^a},$$

где

$$R(F_0) = F_0 - \left(B^{-1}V\right)_\alpha U_\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$\{F_0\} \cap P = \{R(F_0)\}_{P/I}, \tag{7}$$

где $\{F\}_{P/I} \in P/I$ - класс эквивалентности представляемый $F \in P$ Выражение $\{R(F_0)\}_{P/I}$ представляет собой искомый вид наблюдаемых в теории (1).

Определим линейную функцию $T : P/I \to A/\Phi$,

$$T\left(\{F\}_{P/I}\right) = \{F\}.$$

В силу (7), обратная функция $T^{-1} : A/\Phi \to P/I$ задаётся формулой

$$T^{-1}(\{F\}) = \{R(F)\}_{P/I}.$$

Непосредственно проверяется, что отображение T является изоморфизмом относительно умножения:

$$T(\{F\}_{P/I}\{G\}_{P/I}) = T(\{FG\}_{P/I}) = \{FG\} = \{F\}\{G\} = T(\{F\}_{P/I})T(\{F\}_{P/I}).$$

Рассмотрим теорию с калибровочным условием $V = (V_\alpha(q))$. В силу предположения о структуре калибровок,

$$V_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta} U_\beta, \qquad (8)$$

где $\Lambda_{\alpha\beta}(q)$ – обратимая матрица. Пусть Ψ - алгебра функционалов исчезающих на уравнениях движения

$$\frac{\delta S}{\delta q} = 0, \ V = 0.$$

Используя (8) легко убедиться, что $\{F\}_{A/\Psi} = \{F\}_{A/\Phi}$.

Отсюда следует равенство

$$A/\Phi = A/\Psi.$$

Таким образом, алгебра наблюдаемых не зависит от выбора калибровочного условия.

ЛИТЕРАТУРА

1. D.M.Gitman and I.V.Tyutin, Canonical Quantization of Fields with Constraints, Springer Series in Nuclear Particle Phys., Springer-Verlag, Berlin, 1990.

2. A.V.Bratchikov, Realizations of observables in Hamiltonian systems with first class constraints, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 4, 2007, 517-522.

REFERENCES

1. D.M.Gitman and I.V.Tyutin, Canonical Quantization of Fields with Constraints, Springer Series in Nuclear Particle Phys., Springer-Verlag, Berlin, 1990.

2. A.V.Bratchikov, Realizations of observables in Hamiltonian systems with first class constraints, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 4, 2007, 517-522.

CLASSICAL OBSERVABLES OF GAUGE THEORIES

A.V. BRATCHIKOV

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: bratchikov@kubstu.ru

In a Lagrangian theory with first class constraints, explicit expressions for classical observables are found. Descriptions with and without gauge fixing are studied.
Key words: gauge theories; Lagrangian formalism; observables.