517.521

ПРИЗНАКИ СГУЩЕНИЯ III. ОБЩИЙ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЙ ПРИЗНАК СГУЩЕНИЯ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, ОСНОВАННОЕ НА ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРИЗНАКЕ СХОДИМОСТИ МАКЛОРЕНА - КОШИ

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Дано прямое обобщение показательного признака сгущения сходимости бесконечного положительного ряда с монотонно убывающими членами. Приведено его доказательство с использованием интегрального признака сходимости Маклорена - Коши. Дана новая оценка сумме ряда в случае сходимости.

Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, положительный ряд, ряд с убывающими членами, признак сгущения, показательный признак сгущения, интегральный признак сходимости, оценка суммы, Ж. Бертран, Е. Борель, К. Кнопп, О. Коши, К. Маклорен, Н. Орезм, Е. Фабри.

1. История показательного признака сгущения. В приложениях часто встречаются ряды с положительными и невозрастающими членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{1}$$

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \dots \ge a_n \ge \dots . \tag{2}$$

Таким рядом, например, является обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 0 .$$

Самая ранняя идея доказательства расходимости гармонического ряда $(s = 1)$, основанная на монотонном убывании его членов, была предложена Николаем Орезмом около 1350 года [1, 2]. Великий французский математик О. Коши развил её, предложив в 1821 году в своём «Курсе алгебраического анализа» признак сгущения [3, pp. 135 - 136]:

Положительный ряд (1), удовлетворяющий условию (2), сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \,. \tag{3}$$

В 1864 году известный французский математик Ж. Бертран в первой части «Дифференциальное исчисление» своего «Тракта о дифференциальном исчислении и исчислении интегральном» привёл очевидное обобщение признака сгущения Коши [4, pp. 234 - 235], заменив ряд (3) на общий ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} m^k a_{m^k} \,, \tag{4}$$

где m – натуральное число, не меньшее двух.

Наконец знаменитый французский математик Э. Борель [5] в 1902 году заметил, что признак сгущения Коши – Бертрана можно расширить следующим образом:

Положительный ряд (1), *удовлетворяющий условию* (2), *сходится или расходится одновременно с рядом*

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^k a_{[b^k]} \,, \tag{5}$$

где $b > 1$ - *произвольное вещественное число*, $[b^k]$ - *целая часть вещественного числа* b^k.

2. Общий показательный признак сгущения. Замечание Э. Бореля позволяет сформулировать дальнейшее обобщение признака сгущения Коши – Бертрана, названое нами *общим показательным признаком сгущения*.

Введём неотрицательную и невозрастающую функцию $f(x)$, заданную на промежутке $1 \le x < \infty$ и такую, что в случае натурального аргумента, её значения совпадают с членами ряда (1)

$$f(n) = a_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Очевидно, что для любого ряда (1), члены которого удовлетворяют условию (2), такую функцию можно получить, например, линейной интерполяцией. В этом случае, график функции $f(x)$ будет ломанной с бесконечным числом звеньев. Теперь дадим формулировку общего показательного признака сгущения:

Пусть функция $f(x)$ *принимает на неограниченном промежутке* $1 \le x < \infty$ *положительные значения и не возрастает на нём. Если для любого натурального числа n*

$$a_n = f(n),$$

то положительный ряд (1), удовлетворяющий условию (2), сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^k f(b^k), \tag{6}$$

где $b > 1$ - *произвольное вещественное число*.

В случае сходимости справедлива оценка

$$\left(1-b^{-1}\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b^k f(b^k) - f(1)\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le (b-1)\sum_{k=0}^{\infty} b^k f(b^k) + f(1).. \tag{7}$$

Перейдём к доказательству показательного признака сгущения. Для дальнейшего изложения нам понадобится *интегральный признак сходимости Маклорена – Коши* положительных рядов с невозрастающими членами, первоначально установленный в геометрической форме знаменитым шотландским математиком К. Маклореном в 1742 году [6]. Этот признак, забытый к началу XIX века, был вновь открыт Коши в 1827 году [7]:

Положительный ряд (1), *удовлетворяющий условию* (2), *сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом*

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx, \tag{8}$$

где $f(x)$ *- неотрицательная и невозрастающая функция, заданная на неограниченном промежутке* $x \geq 1$ *и принимающая значения* $f(n) = a_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$. *В случае сходимости, справедлива оценка*

$$\int_1^\infty f(x)dx \leq \sum_{n=1}^\infty f(n) \leq \int_1^\infty f(x)dx + f(1). \tag{9}$$

Рассмотрим бесконечную монотонно возрастающую и неограниченную сверху последовательность аргументов функции $f(x)$

$$1 = b^0 < b^1 < b^2 < \ldots < b^k < \ldots, \quad 1 < b < \infty. \qquad (10).$$

Так как функция $f(x)$ монотонна на промежутке $1 \leq x < \infty$, то она интегрируема на любом отрезке $[1, \beta]$ из этого промежутка [8, с. 329, 9, с. 135]. Тогда

$$\int_1^{b^n} f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{b^{k-1}}^{b^k} f(x)dx. \tag{11}$$

В силу того, что функция $f(x)$ невозрастающая, имеем

$$\left(b^k - b^{k-1}\right) f(b^k) \leq \int_{b^{k-1}}^{b^k} f(x)dx \leq \left(b^k - b^{k-1}\right) f(b^{k-1}).$$

Складывая это неравенство с разными значениями *k*, изменяющимися в пределах от $k = 1$ до $k = n$, и учитывая формулу (11), получим

$$\sum_{k=1}^n \left(b^k - b^{k-1}\right) f(b^k) \leq \int_1^{b^n} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^n \left(b^k - b^{k-1}\right) f(b^{k-1}). \tag{12}$$

Пусть положительный ряд (1), члены которого подчиняются условию (2), сходится. Тогда согласно интегральному признаку несобственный интеграл (8) сходится к некоторому значению I. Причём для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$\int_1^{b^n} f(x)dx < \int_1^{\infty} f(x)dx = I .$$

Из левой части неравенства (12) получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n} \left(b^k - b^{k-1}\right) f(b^k) \le \int_1^{b^n} f(x)dx < I .$$

Отсюда следует, что все частичные суммы положительного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(b^k - b^{k-1}\right) f(b^k)$$

ограничены сверху. Поэтому он сходится, и для его суммы, с учетом неравенства (9), получаем оценку сверху

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(b^k - b^{k-1}\right) f(b^k) \le I \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n)) .$$

В таком случае ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^k f(b^k) = \frac{b}{b-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(b^k - b^{k-1}\right) f(b^k) + f(1)$$

сходится и для его суммы справедлива оценка

$$\left(1 - b^{-1}\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b^k f(b^k) - f(1)\right) \le I \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n)) . \qquad (13)$$

Пусть теперь ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^k f(b^k) = V .$$

сходится к своей сумме V. Умножив это равенство на множитель $b-1$, получим

$$(b-1)V=\sum_{k=0}^{\infty}(b^{k+1}-b^k)f(b^k)=\sum_{k=1}^{\infty}(b^k-b^{k-1})f(b^{k-1}).$$

Отсюда следует, что частичные суммы ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b^k-b^{k-1})f(b^{k-1})$$

ограничены сверху

$$\sum_{k=1}^{n}(b^k-b^{k-1})f(b^{k-1})\le(b-1)V.$$

Тогда из правой части неравенства (12) следует, что

$$\int_1^{b^n}f(x)dx\le\sum_{k=1}^{n}\left(b^k-b^{k-1}\right)f(b^{k-1})\le(b-1)V.$$

Отсюда следует, что несобственный интеграл (8) сходится и выполняется неравенство

$$\int_1^{\infty}f(x)dx\le(b-1)V=(b-1)\sum_{k=0}^{\infty}b^kf(b^k). \tag{14}$$

В таком случае, согласно интегральному признаку сходимости, ряд (1) сходится, причём его сумма, как это следует из неравенства (9) ограничена сверху

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\le\int_1^{\infty}f(x)dx+f(1)\le(b-1)\sum_{k=0}^{\infty}b^kf(b^k)+f(1). \tag{15}$$

Итак, ряд (1) и ряд (6) сходятся одновременно. Поэтому расходиться они могут тоже только одновременно. В случае сходимости этих рядов из неравенств (13) и (15) следует оценка (7)

$$\left(1-b^{-1}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}b^kf(b^k)-f(1)\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\le(b-1)\sum_{k=0}^{\infty}b^kf(b^k)+f(1).$$

В качестве примера применения общего показательного признака сгущения исследуем на сходимость ряд Бертрана

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta} n}, \quad \alpha>0, \quad \beta>0 .$$

Согласно общему показательному признаку сгущения (мы выбираем $b=e$), этот ряд сходится или расходится вместе с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{k}}{e^{k\alpha}\ln^{\beta} e^{k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{e^{(\alpha-1)k}k^{\beta}} .$$

Сходимость при значении $\alpha>1$ (или расходимость при значении $0<\alpha<1$) независимо от значения величины β последнего ряда легко установить с помощью признака Даламбера [9, 10, 11, 12, 13]. Если $\alpha=1$, то мы получаем обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\beta}}, \quad \beta>0 ,$$

который, как известно, сходится в случае $\beta>1$ и расходится в противном случае $0<\beta\leq 1$ [9, 10, 11, 12, 13]. Впрочем, обобщенный гармонический ряд сам может быть исследован с помощью общего показательного признака сгущения.

Действительно, пусть $b=e$, тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\beta}}, \quad \beta>0$$

сходится или расходится вместе с рядом

$$\sum_{m=0}^{\infty}e^{m}\frac{1}{e^{m\beta}}=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e^{(\beta-1)}}\right)^{m}, \quad \beta>0 .$$

Если $\beta > 1$ (тогда $\frac{1}{e^{(\beta-1)}} < 1$), то обобщённый гармонический ряд сходится. Если $\beta \le 1$ (тогда $\frac{1}{e^{(\beta-1)}} \ge 1$) то обобщённый гармонический ряд расходится.

Заключение. Общий показательный признак сгущения доказан с учетом монотонного убывания членов положительного ряда за счёт выбора показательной последовательности

$$\{b^k\}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

и применения интегрального признака сходимости Маклорена – Коши. Последний признак использовался для получения оценки (7) суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Следовательно, как и в случае общего степенного признака сгущения, остается надежда на уточнение оценки (7).

Следует отметить, что общий показательный признак сгущения не следует из общих признаков сгущения Кноппа (ошибочно называемого признаком Шлёмильха [11, 12]) и Фабри [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. **История математики. Т1.** С древнейших времен до начала нового времени. Под ред. А.П. Юшкевича. М. Наука, 1970. 351 с.

2. **Статья «Гармонический ряд»** из сетевой энциклопедии ВикипедиЯ, http://ru.wikipedia.org/wiki/Гармонический_ряд .

3. **Cauchy A.L.** Cours d'analyse de l'École royale polytechnique I.re partie: Analyse algébrique. – Paris: Impr. royale Debure frères, 1821. – 576 p.

4. **Bertrand J.** Traité de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral. Premiére Partie. Calcul Différentiel, Paris, Gauthier-Villars, 1864. 780 p.

5. **Borel E.** Leçons sur les Séries a Termes Positifs. Paris, Gauthier-Villars, 1902. 91 p.

6. **Maclaurin K.** A Treatise of Fluxions. Vol. 1, Edinburgh, 1742.

7. **Cauchy A.** Exercices Mathém, T.2, p 221, Paris, – 1827.

8. **Фихтенгольц Г.М.** Основы математического анализа. Т. 1. – СПб.: Лань, 2001. – 448 с.

9. **Рудин У.** Основы математического анализа. Изд. 2-е., стереот. – М.: Мир, 1976, – 319 с.

10. **Фихтенгольц Г.М.** Основы математического анализа. Т. 2. – СПб.: Лань, 2001. – 464 с.

11. **Knopp K.** Theorie und anwendung der unendlichen reihen. Berlin, Springer, 1922. – 474 s.

12. **Bonar D.D., Khoury M. Jr.** Real infinite series. – Mathematical Association of America, 2006. – 264 с.

13. **Fabry E.** Théorie des séries a termes constants applications aux calculs numériques. – Paris, Hermann, 1910. – 198 p.

REFERENCES

1. **Istorija matematiki. T1.** S drevnejshih vremen do nachala novogo vremeni. (A history of mathematics. T1. From Ancient Times To The Beginning Of A New Time) Pod red. A.P. Jushkevicha. Moscow, 1970. 351 p.

2. **Stat'ja «Garmonicheskij rjad» (The Harmonic Series)** iz setevoj jenciklopedii VikipediJa, http://ru.wikipedia.org/wiki/Гармонический_ряд .

3. **Cauchy A.L.** Cours d'analyse de l'École royale polytechnique I.re partie: Analyse algébrique. – Paris: Impr. royale Debure frères, 1821. – 576 p.

4. **Bertrand J.** Traité de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral. Premiére Partie. Calcul Différentiel, Paris, Gauthier-Villars, 1864. 780 p.

5. **Borel E.** Leçons sur les Séries a Termes Positifs. Paris, Gauthier-Villars, 1902. 91 p.

6. **Maclaurin K.** A Treatise of Fluxions. Vol. 1, Edinburgh, 1742.

7. **Cauchy A.** Exercices Mathém, T.2, p 221, Paris, – 1827.

8. **Fihtengol'c G.M.** Osnovy matematicheskogo analiza. T. 1. – SPb.: Lan', 2001. – 448 s.

9. **Rudin W.** Principles of Mathematical Analysis. 3-d ed. N.J. McGraw-Hill, Inc., 1976, – X+342 p.

10. **Fihtengol'c G.M.** Osnovy matematicheskogo analiza. T. 2. – SPb.: Lan', 2001. – 464 s.

11. **Knopp K.** Theorie und anwendung der unendlichen reihen. Berlin, Springer, 1922. – 474 s.

12. **Bonar D.D., Khoury M. Jr.** Real infinite series. – Mathematical Association of America, 2006. – 264 c.

13. **Fabry E.** Théorie des séries a termes constants applications aux calculs numériques. – Paris, Hermann, 1910. – 198 p.

CONDENSATION TESTS III. THE GENERAL EXPONENTIAL CONDENSATION TEST. THE PROOF BASED ON MACLAURIN – CAUCHY'S INTEGRAL TEST FOR CONVERGENCE

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

A direct generalization of the exponential condensation test for convergence of the infinite series with the positive monotonically decreasing terms is given. The proof is given by using Maclaurin – Cauchy's integral test for convergence. New sum bounds of the infinite series in the case of a convergence are given.

Keywords: infinite series, positive infinite series, infinite series with the decreasing terms, condensation test, exponential condensation test, integral test for convergence, sum bounds, J. Bertrand, E. Borel, A. Cauchy, E. Fabry, K. Knopp, K. Maclaurin, N. Oresme.