517.521

О СВЯЗИ ЗНАЧЕНИЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА НАТУРАЛЬНОГО АРГУМЕНТА С СУММАМИ ДВУХ КЛАССОВ СХОДЯЩИХСЯ БЕСКОНЕЧНЫХ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Рассмотрена история возникновения Базелевской задачи, отслеженная по первоисточникам. Отмечено, что пока никто не знает, почему задача так названа. Имеется две достоверные версии, объясняющие её название. Рассмотрена связь значений дзета-функции Римана натурального аргумента с сумами двух классов сходящихся числовых рядов. Показано с помощью численного эксперимента, что предположение Ван дер Поортена об этих суммах можно считать правдоподобным. Для окончательного решения вопроса необходимо вычислить суммы этих рядов в замкнутой форме.

Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, дзета-функция Римана, постоянная Апери, Базелевская задача, иррациональное число.

1. Дзета-функция Римана и Базелевская задача. Дзета-функцию Римана $\zeta(z)$ комплексного переменного z обычно определяют на открытой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 1$ как сумму сходящегося на этой полуплоскости ряда Дирихле [1, 2]

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad \operatorname{Re} z > 1. \tag{1}$$

Ещё в 1644 г. итальянский математик Пьетро Менголе безуспешно пытался вычислить значение суммы обратных квадратов натуральных чисел, то есть число $\zeta(2)$ [3]. Необходимо, заметить, что автор книги [3], американский математик Джон Дербишир, который указывает на этот факт, не потрудился представить никаких доказательств, ни ссылок на исторические документы, свидетельствующие о правоте своего утверждения. С другой стороны, нет пока веских доказательств, чтобы оспаривать утверждение Дж. Дербишира, так как П. Менголе очень плодотворно занимался исследованиями различных бесконечных числовых рядов. Он, не зависимо от Николя Орезмского, дал своё доказательство расходимости гармонического ряда [4]

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \ .$$

Первым, опередив Гюйгенса, Лейбница и Якоба Бернулли [4], вычислил сумму бесконечного ряда чисел, обратных треугольным числам

$$\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{2}{n(n+1)}+\ldots=2\,.$$

Первым, опередив Меркатора и Броункера, нашёл сумму бесконечного ряда [4]

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots=\ln 2\,.$$

Первым, опередив Якова и Иоганна Бернулли, доказал сходимость бесконечного ряда обратных квадратов [4]. Тем не менее, задача о нахождении суммы бесконечного ряда обратных квадратов тогда не вызвала общего интереса.

Почти через полвека, внимание ведущих математиков Европы к этой задаче сумел привлечь Яков Бернулли. В своей книге «*Арифметические предложения о бесконечных рядах*», написанной на латыни и изданной в Базеле в 1689 году [5, 6] (перевод на немецкий язык см. в [7]), он писал: “*Si quis inveniat nobisque communicet, quod industriam nostram elusit hactenus, magnas de nobis gratias ferret*”. В переводе с латинского языка на немецкий язык эта фраза звучит так [7, s. 24]: "*Wenn jemand es findet und uns mitteilt, was bisher unserer Bemühung gespottet hat, so werden wir ihm selir dankbar sein*”. Её перевод на русский язык без всякого упоминания источника можно найти в книге Пойа [8, с. 40]: «*Если кому-либо удастся найти то, что до сих пор не поддавалось нашим усилиям, и если он сообщит это нам, то мы будем очень ему обязаны*».

С тех пор эта задача вошла в историю математики под названием *Базелевской задачи* (*Basel problem*) по имени города Базеля в Швейцарии - родного города Якова Бернулли. Над этой задачей, кроме самого Якова Бернулли, безуспешно бились многие выдающиеся математики такие, как Лейбниц, Стирлинг, де Муавр и младший брат Якова Иоганн Бернулли.

Базельская задача была решена в 1734–1735 годах в Санкт-Петербурге учеником Иоганна Бернулли, гениальным швейцарским математиком Леонардом Эйлером (1707–1786) [9, 10, 11], большую часть прожившим в России. Он нашёл, что сумма ряда (1) для значения $z = 2$ равна

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \tag{2}$$

Остроумный метод, который применил Эйлер, заключался в разложении степенного ряда

$$\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+..$$

в бесконечное произведение

$$\frac{\sin x}{x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\ldots \quad .$$

Раскрывая здесь скобки, мы получим ещё одно разложение в степенной ряд с коэффициентом при члене x^2, равным

$$-\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\right)\frac{1}{\pi^2}.$$

Поскольку разложение в бесконечный ряд единственно, то коэффициент при члене x^2 должен быть равен $-\dfrac{1}{3!}$. Отсюда получаем равенство

$$-\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...\right)\frac{1}{\pi^2}=-\frac{1}{3!},$$

из которого следует равенство (2). Возможно, что задача, предложенная Яковом Бернулли и решённая Эйлером, ещё одним уроженцем города Базеля, стала называться Базелевской проблемой именно после решения её Эйлером. По крайней мере, ещё ни кто из историков математики не прояснил этого вопроса.

Метод Эйлера не был строгим даже на уровне того времени и вызвал обоснованные возражения. Тем не менее, он принёс Эйлеру славу лучшего математика мира и позволил ему в дальнейшем найти суммы чисел обратных чётным степеням натуральных чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_k, \tag{3}$$

где

$k\geq 1$ – натуральное число;

B_k – числа Бернулли $\left(B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},\quad B_4=\frac{1}{30},...\right)$, названные по имени Якова Бернулли, который ввел их для вычисления конечных сумм степеней натуральных чисел [12, 13].

Задачу вычисления суммы общего гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^m}=1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+...+ \tag{4}$$

для произвольного натурального показателя степени $m\geq 2$ будем называть *обобщенной Базельской задачей*. Это название было введено нами в [14]. Эту задачу частично решил Эйлер, найдя сумму ряда (4) для произвольного четного натурального показателя степени m (см. формулу (3)). Для нечётного m задача не решена до настоящего времени.

2. Представление значений дзета-функции Римана натурального аргумента суммами двух классов сходящихся бесконечных числовых рядов.

Математиков интересует не только задача вычисления суммы некоторого бесконечного числового ряда в замкнутой форме, но и задача выявления числовой природы этой суммы. Из формулы (3), полученной Эйлером, следует, что значения дзета-функции Римана $\zeta(2n)$ чётного натурального аргумента иррациональны, поскольку иррационально любое число π^r для рационального числа r [15].

Можно представить себе какой неожиданностью для математиков стало сообщение о доказательстве иррациональности числа $\zeta(3)$ французским математиком Роже Апери в 1979 году [16]. Чувство растерянности, вызванное этим доказательством у большинства математиков высокого ранга, хорошо передано австралийским математиком Альфредом Ван дер Поортеном [17].

Среди формул, использованных Апери в своём доказательстве, имеется следующие неожиданные равенства [16, 17]

$$\zeta(2) = 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 C_{2n}^n}, \tag{5}$$

$$\zeta(3) = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3 C_{2n}^n}. \tag{6}$$

К ним Ван дер Поортен присоединил ещё несколько

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} = \frac{36}{17}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4 C_{2n}^n}, \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{C_{2n}^n} = \frac{1}{3} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}, \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nC_{2n}^n} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}. \tag{9}$$

Ряды (5) – (9) естественным образом образуют бесконечные суммы двух классов (число m мы будем называть порядком)

$$\frac{1}{\pi^m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^m C_{2n}^n} = A_m, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \tag{10}$$

$$\frac{1}{\pi^m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^m C_{2n}^n}=B_m, \quad m=1,2,3,\dots . \tag{11}$$

Из формул (5) и (7) следует, что $A_2=\frac{1}{18}$, $A_4=\frac{17}{3240}$. Можно предположить, что коэффициенты $A_{2m}, m=3,4,\dots$ рациональны. Однако, численные эксперименты, проведённые нами в пакете MathCAD 14, пока не подтверждают этого предположения:

$$A_2=\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{30}\frac{1}{n^2 C_{2n}^n}=0,0555555555555555\approx\frac{1}{18}$$

$$9\cdot 90\cdot A_4=9\cdot\frac{90}{\pi^4}\sum_{n=1}^{60}\frac{1}{n^4 C_{2n}^n}=4,249999999999999\approx\frac{17}{4}$$

$$945\cdot A_6=\frac{945}{\pi^6}\sum_{n=1}^{70}\frac{1}{n^6 C_{2n}^n}=0,49410718985760693\approx ?\,.$$

Начиная с коэффициента A_6, мы не смогли пока подобрать подходящего рационального значения.

$$B_3=\frac{1}{\zeta(3)}\sum_{n=1}^{50}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3 C_{2n}^n}=0,4=\frac{2}{5},$$

$$B_5=\frac{1}{\zeta(5)}\sum_{n=1}^{100}\frac{(-1)^{n-1}}{n^5 C_{2n}^n}=0,4773569041527123=?\,.$$

Начиная с коэффициента B_5, мы так же не смогли пока подобрать подходящего рационального значения. Таким образом, предположения Ван дер Поортена о том, что формулы (10) и (11) имеют рациональные значения для величин A_m и B_m только для самых первых значений подтверждается.

Заключение. Рассмотрена связь значений дзета-функции Римана натурального аргумента с суммами двух классов сходящихся числовых рядов (10) и (11). Показано с помощью численного эксперимента, что что предположение Ван дер Поортена о том, что формулы (10) и (11) имеют рациональные значения для величин A_m и B_m только для самых первых значений можно считать правдоподобным. Для окончательного решения вопроса необходимо вычислить суммы рядов (10) и (11) в замкнутой форме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана. – М.: ИЛ, 1953, – 407 с.
2. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функции Римана. – М.: Физматлит, 1994, – 376 с.
3. Дербишир Дж. Простая одержимость. Бернхард Риман и величайшая не решённая проблема в математике. – М.: Астрель, 2010, – 463 с.
4. Mengoli Petri. Nouæ quadraturæ arithmeticæ, seu De additione fractionum. – Bononiæ : ex typographia Iacobi Montij, 1650, – 130 p.
5. Bernoulli Jakobo. Positiones Arithmeticæ de Seriebvs Infinitis. – Basileæ, Typis Johann, Conradi Mechel, 1689, – 20 s.
6. Bernoulli Jakobo. Positiones Arithmeticæ de Seriebus Infinitis. – Die Werke von Jakob Bernoulli. Band 4. Reihentheorie. Ediert von David Speiser. – Spriger Basel AG, 1993, – s. 45 – 64.
7. Bernoulli Jakob. Arithmetische Sätze über unendliche Reihen und deren endliche Summe. Über unendliche Reihen (1689-1704). Leipzig, Verlag von Wilhelm Engelmann, 1909. – s. 4 – 24.
8. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – Изд. 2-е, исправленное. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. наук, 1975, – 464 с.
9. Euler L. “De summis serierum reciprocarum,” Commentarii academiae scientorum Petropolitanae, 7, (1734/35) 1740, pp. 123–134.
10. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949, – 580 с.
11. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. Т.1. 2-е изд. – М.: ГИФМЛ, 1961, – 315 с.
12. Bernoulli J. Ars Conjectandi. - Basel: Thurneysen Brothers, 1713, – 131 s.
13. Кудрявцев В.А. Суммирование степеней чисел натурального ряда и числа Бернулли. – М.- Л.: ОНТИ, 1936, – 73 с.

14. Терещенко И.В. Базельская задача I. Метод Коши и его обобщение для вычисления сумм чисел обратных четвёртой степени. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2014. № 2. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/41.

15. Hardy G.H., Wright E.M. An Introduction to the Theory of Numbers. 4-th ed. – Oxford: Clarendon Press, 1975, – 421 p.

16. Apéry R. Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. *Astérisque* 61, (1979), pp. 11-13.

17. van der Poorten A. A Proof that Euler Missed.... Apéry's Proof of the Irrationality of $\zeta(3)$. *Math. Intel.* 1, (1979), pp. 196-203.

REFERENCES

1. Titchmarsh E.K. Teoriya dzeta-funktsii Rimana. – M.: IL, 1953, – 407 s.

2. Voronin S.M., Karatsuba A.A. Dzeta-funktsii Rimana. – M.: Fizmatlit, 1994, – 376 s.

3. Derbishir Dzh. Prostaya oderzhimost. Bernkhard Riman i velichayshaya ne reshennaya problema v matematike. – M.: Astrel, 2010, – 463 s.

4. Mengoli Petri. Nouæ quadraturæ arithmeticæ, seu De additione fractionum. – Bononiæ : ex typographia Iacobi Montij, 1650, – 130 p.

5. Bernoulli Jakobo. Positiones Arithmeticæ de Seriebvs Infinitis. – Basileæ, Typis Johann, Conradi Mechel, 1689, – 20 s.

6. Bernoulli Jakobo. Positiones Arithmeticæ de Seriebus Infinitis. – Die Werke von Jakob Bernoulli. Band 4. Reihentheorie. Ediert von David Speiser. – Spriger Basel AG, 1993, – s. 45 – 64.

7. Bernoulli Jakob. Arithmetische Sätze über unendliche Reihen und deren endliche Summe. Über unendliche Reihen (1689-1704). Leipzig, Verlag von Wilhelm Engelmann, 1909. – s. 4 – 24.

8. Poya D. Matematika i pravdopodobnye rassuzhdeniya. – Izd. 2-e, ispravlennoe. – M.: Nauka, Gl. red. fiz.-mat. nauk, 1975, – 464 c.

9. Euler L. “De summis serierum reciprocarum,” Commentarii academiae scientorum Petropolitanae, 7, (1734/35) 1740, pp. 123–134.

10. Eyler L. Differentsialnoe ischislenie. – M.-L.: GITTL, 1949, – 580 s.

11. Eyler L. Vvedenie v analiz beskonechnykh. T.1. 2-e izd. – M.: GIFML, 1961, – 315 s.

12. Bernoulli J. Ars Conjectandi -Basel: Thurneysen Brothers, 1713, - 131 s.

13. Kudryavtsev V.A. Summirovanie stepeney chisel naturalnogo ryada i chisla Bernulli. – M.- L.: ONTI, 1936, – 73 s.

14. Tereshchenko I.V. Bazelskaya zadacha I. Metod Koshi i ego obobshchenie dlya vychisleniya summ chisel obratnykh chetvertoy stepeni. [Elektronnyy resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2014. № 2. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/41.

15. Hardy G.H., Wright E.M. An Introduction to the Theory of Numbers. 4-th ed. – Oxford: Clarendon Press, 1975, – 421 p.

16. Apéry R. Irrationalité de et . Astérisque 61, (1979), pp. 11-13.

17. van der Poorten A. A Proof that Euler Missed.... Apéry's Proof of the Irrationality of . Math. Intel. 1, (1979), pp. 196-203.

ON THE RELATION OF VALUES OF RIEMANN ZETA-FUNCTION OF A NATURAL ARGUMENT WITH THE SUMS OF THE TWO CLASSES CONVERGENT INFINITE SERIES

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

The history of occurrence of Basel problem tracked by the original sources. It was noted that so far no one knows why the problem is so named. There are two reliable versions, explaining its name. The relation between the values of Riemann zeta-function of a natural argument with the sums of two classes of convergent infinite series is considered. It is shown by numerical experiments that the assumption of van der Poorten about these sums can be considered plausible. For a final decision it is necessary to calculate the sums of these infinite series in a closed form.

Key words: infinite series, Riemann Zeta-function, Apéry's constant, Basel problem, irrational number.