

**ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ ПОЗИЦИОННЫМ  
ЭЛЕКТРОПРИВОДОМ С УПРУГИМ ВАЛОПРОВОДОМ ПРИ  
ОГРАНИЧЕНИИ ПО МОМЕНТУ ДВИГАТЕЛЯ**

**Ю.П. ДОБРОБАБА, Г.А. КОШКИН, Ф.В. КОНОВАЛОВ, Н.Я. ПРОХОРЕНКО**

*Кубанский государственный технологический университет,  
350072, г. Краснодар, ул. Московская, 2;  
электронная почта: nicita\_ximik@mail.ru*

Предлагается оптимальное по быстродействию управление позиционным электроприводом с упругим валопроводом осуществлять по одной из оптимальных по быстродействию диаграмм перемещения исполнительного органа механизма: при малых перемещениях с ограничением по моменту двигателя; при больших перемещениях с ограничениями по моменту двигателя и скорости механизма. Получены аналитические зависимости для определения: параметров оптимальной по быстродействию диаграммы перемещения исполнительного органа механизма, упруго соединенного с двигателем, при ограничении по моменту двигателя: длительности десяти этапов диаграммы; максимального значения угловой скорости механизма; минимального значения угловой скорости механизма. Установлена область существования оптимальной по быстродействию диаграммы перемещения исполнительного органа механизма, упруго соединенного с двигателем, при ограничении по моменту двигателя, а именно: минимально возможное значение угла поворота исполнительного органа механизма и максимально возможное значение угла поворота исполнительного органа механизма.

**Ключевые слова:** позиционный электропривод; упругий валопровод; диаграмма перемещения исполнительного органа механизма.

Математическая модель силовой части электропривода с упругим валопроводом [1;2]:

$$M(t) = M_y(t) + J_1 \cdot \omega_1^{(1)}(t);$$

$$M_y(t) = M_{co} + J_2 \cdot \omega_2^{(1)}(t);$$

$$\varphi_1^{(1)}(t) = \omega_1(t);$$

$$\varphi_2^{(1)}(t) = \omega_2(t);$$

$$M_y(t) = C_y \cdot [\varphi_1(t) - \varphi_2(t)], \quad (1)$$

где  $M$  - момент электродвигателя,  $H \cdot м$ ;

$M_y$  - момент упругий (момент в валопроводе),  $H \cdot м$ ;

$M_{co}$  - момент сопротивления,  $H \cdot м$ ;

$\omega_1$  - угловая скорость исполнительного органа электродвигателя,  $\frac{рад}{с}$ ;

$\omega_2$  - угловая скорость исполнительного органа механизма,  $\frac{рад}{с}$ ;

$\varphi_1$  - угол поворота исполнительного органа электродвигателя,  $рад$ ;

$\varphi_2$  - угол поворота исполнительного органа механизма,  $рад$ ;

$J_1$  - момент инерции исполнительного органа электродвигателя,  $кг \cdot м^2$ ;

$J_2$  - момент инерции исполнительного органа механизма,  $кг \cdot м^2$ ;

$C_y$  - упругость валопровода,  $\frac{Н \cdot м}{рад}$ .

Критерий оптимизации

$$\int_0^{T_u} dt = \min, \quad (2)$$

где  $T_u$  - длительность цикла,  $с$ .

На координаты электропривода накладываются ограничения:

$$M_{\min} \leq M(t) \leq M_{\max}; \quad (3)$$

$$-\omega_{\text{дон}} \leq \omega_2(t) \leq \omega_{\text{дон}}; \quad (4)$$

где  $M_{\min}$  - минимальное значение момента электродвигателя,  $Н \cdot м$ ;

$M_{\max}$  - максимальное значение момента электродвигателя,  $Н \cdot м$ ;

$\omega_{\text{дон}}$  - максимально допустимое значение угловой скорости исполнительного органа механизма,  $\frac{рад}{с}$ .

Начальные значения контролируемых координат:

$$M(0) = M_{co};$$

$$M_y(0) = M_{co};$$

$$\omega_1(0) = 0;$$

$$\omega_2(0) = 0;$$

$$\varphi_2(0) = 0;$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_{нач} + \frac{1}{C_y} \cdot M_{co}, \quad (5)$$

где  $\varphi_{нач}$  - начальное значение угла поворота исполнительного органа механизма, *рад*.

Конечные значения контролируемых координат:

$$M(T_u) = M_{co};$$

$$M_y(T_u) = M_{co};$$

$$\omega_1(T_u) = 0;$$

$$\omega_2(T_u) = 0;$$

$$\varphi_2(T_u) = \varphi_{кон};$$

$$\varphi_1(T_u) = \varphi_{кон} + \frac{1}{C_y} \cdot M_{co}, \quad (6)$$

где  $\varphi_{кон}$  - конечное значение угла поворота исполнительного органа механизма, *рад*.

Задача оптимального по быстродействию управления перемещением исполнительного органа механизма, упруго соединенного с двигателем, при ограничении по моменту двигателя, справедливая при малых значениях изменения угла поворота (перемещения), формулируется следующим образом: определить диаграмму перемещения исполнительного органа механизма, упруго соединённого с двигателем, удовлетворяющего системе уравнений (1) и доставляющего минимум интегралу (2), при ограничении по моменту двигателя (3), начальных значениях (5) и конечных значениях (6).

Задача оптимального по быстродействию управления перемещением исполнительного органа механизма, упруго соединенного с двигателем, при ограничениях по моменту двигателя и скорости механизма, справедливая при больших значениях изменения угла поворота (перемещения), формулируется следующим образом: определить диаграмму перемещения исполнительного органа механизма, упруго соединенного с двигателем, удовлетворяющего системе уравнений (1) и доставляющего минимум интегралу (2) при ограничениях по моменту двигателя (3) и скорости механизма (4), начальных значениях (5) и конечных значениях (6).

В данной работе решается задача оптимального по быстродействию управления позиционным электроприводом с упругим валопроводом при ограничении по моменту двигателя.

Так как система уравнений (1) имеет локальные ограничения, то в соответствии с принципом максимума академика Л.С. Понтрягина, управляющее воздействие представляет собой кусочно-постоянную функцию от времени, принимающую граничные значения.

Система уравнений (1) представима в виде:

$$\frac{J_1 J_2}{C_y (J_1 + J_2)} \cdot \varphi_2^{(4)}(t) + \varphi_2^{(2)}(t) = \frac{M(t) - M_{co}}{J_1 + J_2}.$$

Характеристическое уравнение системы (1) имеет вид:

$$\left[ \frac{J_1 J_2}{C_y (J_1 + J_2)} \cdot p^2 + 1 \right] \cdot p^2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения:

$$p_{1;2} = 0;$$

$$p_{3;4} = \sqrt{\frac{C_y (J_1 + J_2)}{J_1 J_2}}.$$

На рисунках 1 и 2 представлена оптимальная по быстродействию диаграмма перемещения исполнительного органа механизма, упруго соединенного с двигателем, при ограничении по моменту двигателя, состоящая из десяти этапов. На первом, третьем, пятом, седьмом и девятом этапах момент двигателя имеет максимальное значение; на втором, четвертом, шестом, восьмом и десятом этапах момент двигателя имеет минимальное значение.

В результате проведенных исследований получены следующие закономерности.

Длительности первого и пятого этапов равны

$$t_1 = t_5 = \sqrt{\frac{J_1 J_2}{C_y (J_1 + J_2)}} \cdot \arccos \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{M_{\max} - M_{co}}{M_{\max} - M_{\min}} \right].$$

Длительности второго и четвертого этапов равны

$$t_2 = t_4 = \sqrt{\frac{J_1 J_2}{C_y (J_1 + J_2)}} \cdot \arccos \left[ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(M_{\max} - M_{co})^2}{(M_{\max} - M_{\min})^2} \right].$$

Длительности шестого и десятого этапов равны

$$t_6 = t_{10} = \sqrt{\frac{J_1 J_2}{C_y (J_1 + J_2)}} \cdot \arccos \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{M_{co} - M_{\min}}{M_{\max} - M_{\min}} \right].$$

Длительности седьмого и девятого этапов равны

$$t_7 = t_9 = \sqrt{\frac{J_1 J_2}{C_y (J_1 + J_2)}} \cdot \arccos \left[ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(M_{co} - M_{\min})^2}{(M_{\max} - M_{\min})^2} \right].$$

Длительность третьего этапа равна

$$t_3 = \left[ t_7^2 + 2 \cdot \frac{M_{co} - M_{\min}}{M_{\max} - M_{co}} \cdot t_2 t_7 + 2 \cdot \frac{M_{co} - M_{\min}}{M_{\max} - M_{co}} \cdot \frac{(J_1 + J_2) \cdot (\varphi_{\text{кон}} - \varphi_{\text{нач}})}{M_{\max} - M_{\min}} \right]^{0,5} - \left[ 2t_1 + t_7 - \frac{M_{co} - M_{\min}}{M_{\max} - M_{co}} \cdot t_2 \right].$$

Длительность восьмого этапа равна

$$t_8 = \frac{M_{\max} - M_{co}}{M_{co} - M_{\min}} \cdot (2t_1 + t_3 + 2t_7) - 2 \cdot (t_2 + t_6).$$

Длительность цикла равна

$$T_y = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9 + t_{10}.$$

Максимальное значение угловой скорости механизма равно

$$\omega_{\max} = \frac{M_{\max} - M_{co}}{J_1 + J_2} \cdot (2t_1 + t_3) - \frac{M_{co} - M_{\min}}{J_1 + J_2} \cdot 2t_2.$$

Максимальное значение первой производной угловой скорости механизма равно

$$\omega_{\max}^{(1)} = \frac{M_{\max} - M_{co}}{J_1 + J_2}.$$

Минимальное значение первой производной угловой скорости механизма равно

$$\omega_{\min}^{(1)} = -\frac{M_{co} - M_{\min}}{J_1 + J_2}.$$

Область существования оптимальной по быстродействию диаграммы перемещения исполнительного органа механизма, упруго соединенного с двигателем, при ограничении по моменту двигателя:

$$\varphi_{зр.1} \leq (\varphi_{кон} - \varphi_{нач}) \leq \varphi_{зр.2},$$

где  $\varphi_{зр.1}$  - минимально возможное значение угла поворота исполнительного органа механизма, рад;

$\varphi_{зр.2}$  - максимально возможное значение угла поворота исполнительного органа механизма, рад.

Если выполняется условия  $(M_{\max} - M_{co}) \leq (M_{co} - M_{\min})$  и  $t_8 = 0$ , то  $(\varphi_{кон} - \varphi_{нач}) = \varphi_{зр.1}$ .

При этом

$$\begin{aligned} \varphi_{зр.1} = & \frac{M_{\max} - M_{co}}{J_1 + J_2} \cdot [(2t_1^2 + 2t_1t_2 + 4t_1t_6 + 4t_1t_7 + 2t_6t_7 + 2t_7^2) + \\ & + (2t_1 + t_2 + 2t_6 + 2t_7) \cdot t_{3\min} + \frac{1}{2}t_{3\min}^2] - \\ & - \frac{M_{co} - M_{\min}}{J_1 + J_2} \cdot [(2t_1t_2 + 2t_2^2 + 4t_2t_6 + 4t_2t_7 + 2t_6^2 + 2t_6t_7) + t_2t_{3\min}], \end{aligned}$$

где  $t_{3\min} = 2 \frac{M_{co} - M_{\min}}{M_{\max} - M_{co}} \cdot (t_2 + t_6) - 2(t_1 + t_7).$

Если выполняется условия  $(M_{\max} - M_{co}) \geq (M_{co} - M_{\min})$  и  $t_3 = 0$ , то  $(\varphi_{кон} - \varphi_{нач}) = \varphi_{зр.1*}$ .

При этом

$$\begin{aligned} \varphi_{зр.1*} = & \frac{M_{\max} - M_{co}}{J_1 + J_2} \cdot [(2t_1^2 + 2t_1t_2 + 4t_1t_6 + 4t_1t_7 + 2t_6t_7 + 2t_7^2) + \\ & + (2t_1 + t_7) \cdot t_{8\min}] - \\ & - \frac{M_{co} - M_{\min}}{J_1 + J_2} \cdot [(2t_1t_2 + 2t_2^2 + 4t_2t_6 + 4t_2t_7 + 2t_6^2 + 2t_6t_7) + \end{aligned}$$

$$+(2t_2 + 2t_6 + t_7) \cdot t_{8\min} + \frac{1}{2} t_{8\min}^2 \text{ ]},$$

где  $t_{8\min} = 2 \frac{M_{\max} - M_{co}}{M_{co} - M_{\min}} \cdot (t_1 + t_7) - 2(t_2 + t_6).$

Если выполняется условие  $\omega_{\max} = \omega_{don}$ , то  $(\varphi_{кон} - \varphi_{нач}) = \varphi_{зр.2}.$

При этом

$$\begin{aligned} \varphi_{зр.2} = & \frac{M_{\max} - M_{co}}{J_1 + J_2} \cdot [(2t_1^2 + 2t_1t_2 + 4t_1t_6 + 4t_1t_7 + 2t_6t_7 + 2t_7^2) + \\ & + (2t_1 + t_2 + 2t_6 + 2t_7) \cdot t_{3\max} + \frac{1}{2} t_{3\max}^2 + \\ & + (2t_1 + t_7) \cdot t_{8\max} + t_{3\max} \cdot t_{8\max}] - \\ & - \frac{M_{co} - M_{\min}}{J_1 + J_2} \cdot [(2t_1t_2 + 2t_2^2 + 4t_2t_6 + 4t_2t_7 + 2t_6^2 + 2t_6t_7) + \\ & + t_2t_{3\max} + (2t_2 + 2t_6 + t_7) \cdot t_{8\max} + \frac{1}{2} t_{8\max}^2] \text{ ,} \end{aligned}$$

где  $t_{3\max} = \frac{(J_1 + J_2) \cdot \omega_{don}}{M_{\max} - M_{co}} + 2 \cdot \frac{M_{co} - M_{\min}}{M_{\max} - M_{co}} \cdot t_2 - 2t_1;$

$$t_{8\max} = \frac{M_{\max} - M_{co}}{M_{co} - M_{\min}} \cdot (2t_1 + t_{3\max} + 2t_7) - (2t_2 + 2t_6).$$

В данной работе рассматривается электропривод, имеющий следующие параметры:  $J_1 = 0,025 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $J_2 = 0,025 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ; и  $C_y = 5 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}.$

Максимальный и минимальный моменты двигателя соответственно равны:  $M_{\max} = 10 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ; и  $M_{\min} = -10 \text{ Н} \cdot \text{м}.$

Момент сопротивления электропривода равен:  $M_{co} = 5 \text{ Н} \cdot \text{м}.$

Максимально допустимое значение угловой скорости:  $\omega_{don} = 160 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$

Для такого электропривода справедливы следующие граничные значения угла поворота исполнительного органа механизма:  $\varphi_{зр.1} = 8,019932422 \text{ рад}$ ;  $\varphi_{зр.2} = 186,8881124 \text{ рад}.$

Приведенная на рисунках 1 и 2 оптимальная по быстродействию диаграмма перемещения исполнительного органа механизма, упруго соединенного с двигателем, при ограничении момента двигателя имеет следующие параметры:

$$\begin{aligned}
 (\varphi_{кон} - \varphi_{нач}) &= 100 \text{ рад}; & t_1 = t_5 &= 0,072273424 \text{ с}; \\
 t_2 = t_4 &= 0,012532783 \text{ с}; & t_3 &= 1,081138687 \text{ с}; \\
 t_6 = t_{10} &= 0,059319977 \text{ с}; & t_7 = t_9 &= 0,038439677 \text{ с}; \\
 t_8 &= 0,290482776 \text{ с}; & T_y &= 1,736753185 \text{ с}; \\
 \omega_{max} &= 115,0488836 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; & \omega_{max}^{(1)} &= 100 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}; \\
 \omega_{min}^{(1)} &= -300 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.
 \end{aligned}$$

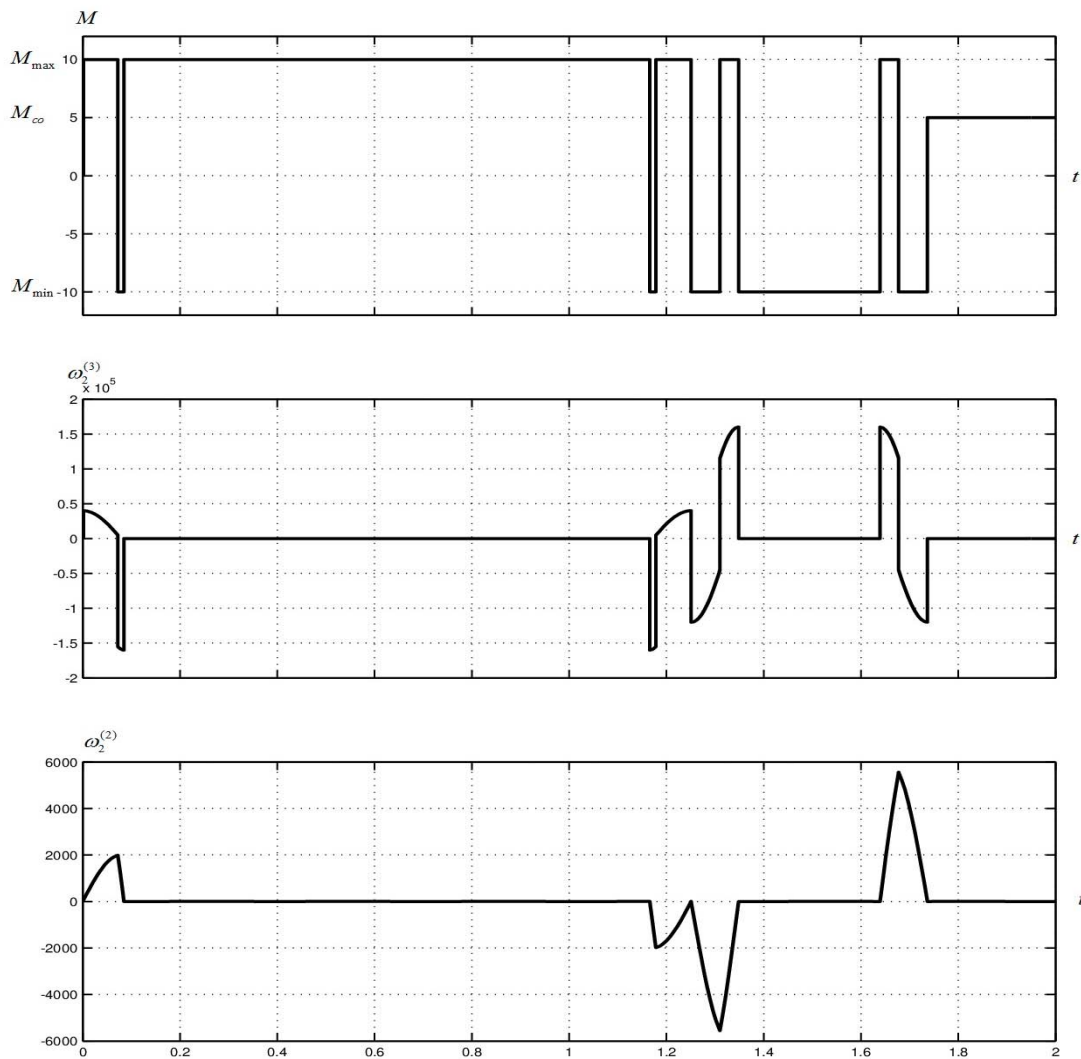


Рисунок 1- Оптимальная по быстродействию диаграмма перемещения исполнительного органа механизма, упруго соединенного с двигателем, при ограничении по моменту (начало).



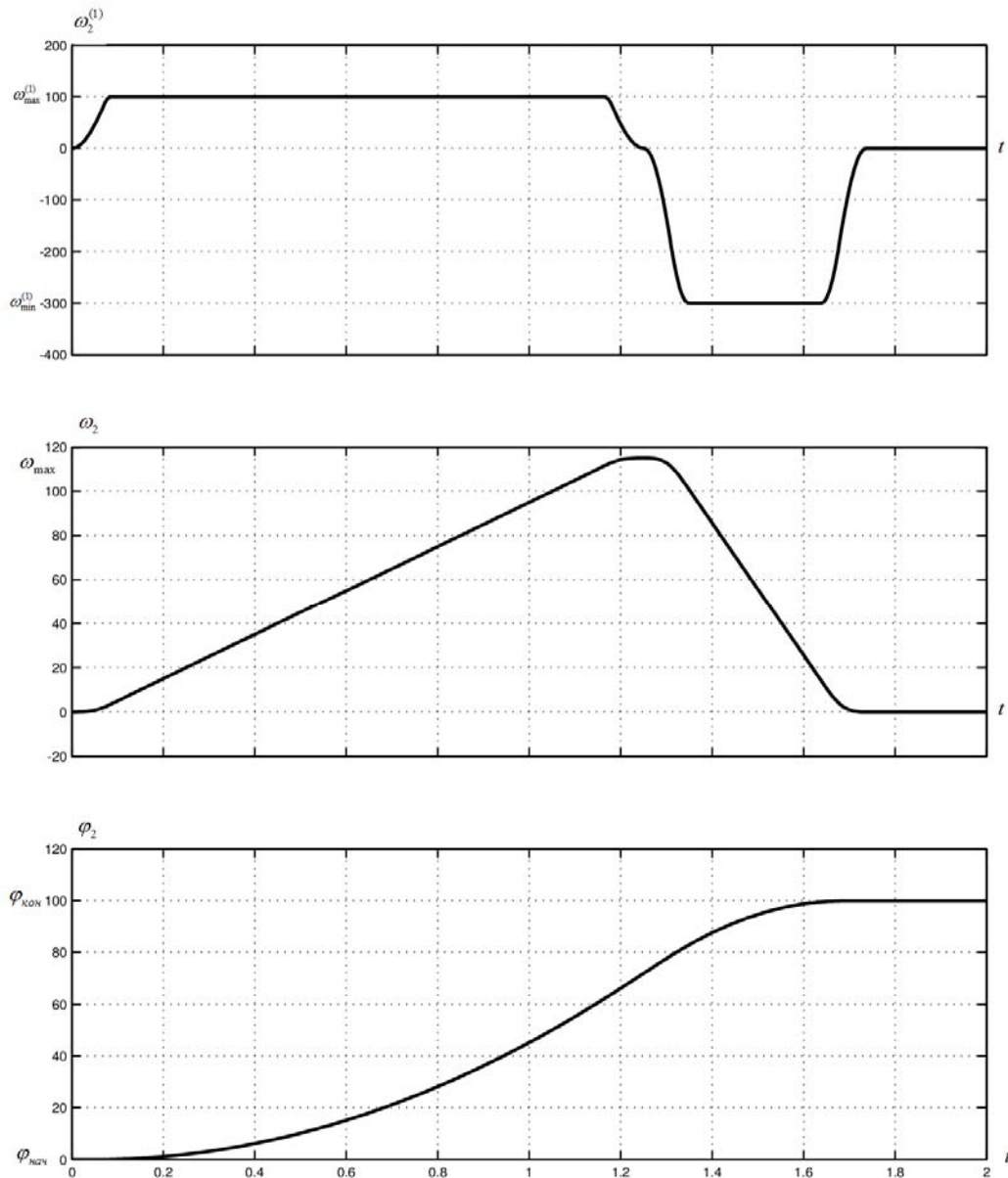


Рисунок 2 – Оптимальная по быстродействию диаграмма перемещения исполнительного органа механизма, упруго соединенного с двигателем, при ограничении по моменту (окончание).

**Выводы:**

1. Определены аналитические зависимости, позволяющие рассчитать параметры оптимальной по быстродействию диаграммы перемещения исполнительного органа механизма, упруго соединенного с двигателем, при ограничении по моменту двигателя.

2. Установлена область существования оптимальной по быстродействию диаграммы перемещения исполнительного органа механизма, упруго соединенного с двигателем, при ограничении по моменту двигателя.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Добробаба Ю.П., Литаш Б.С. Квазиоптимальный по быстродействию программно-управляемый позиционный электропривод: монография / Кубан. гос. технол. ун-т. – Краснодар: Изд. ГУО ВПО «КубГТУ», 2009. – 178 с.

2. Добробаба Ю.П., Коноплин В.И. Микропозиционный программноуправляемый электропривод с упругим валопроводом: монография/Кубан. Гос. Технолог. Ун-т. -Краснодар: Изд. КубГТУ, 2008.-156 с.

## REFERENCES

1. Dobrobaba YU.P., Litash B.S. Kvazioptimalnyy po bystrodeystviyu programmno-upravlyaemyy pozitsionnyy elektroprivod: monografiya / Kuban. gos. tekhnol. un-t. – Krasnodar: Izd. GUO VPO «KubGTU», 2009. – 178 s.

2. Dobrobaba YU.P., Konoplin V.I. Mikropozitsionnyy programmoupravlyaemyy elektroprivod s uprugim valoprovodom: monografiya/Kuban. Gos. Tekhnolog. Un-t. -Krasnodar: Izd. KubGTU, 2008.-156 s.

*OPTIMAL CONTROL OF POSITIONAL ELECTRIC DRIVE WITH ELASTIC SHAFTING WITH THE LIMITATION OF THE ENGINE TORQUE*

**YU.P. DOBROBABA, G.A. KOSHKIN, F.V.KONOVALOV, N.YA. PROKHORENKO**

*Kuban State Technological University,  
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;  
e-mail: nicita\_ximik@mail.ru*

Proposed optimal control of positional electric drive with elastic shafting to carry out one of the optimum performance diagrams of movement of the executive body of the mechanism: in the case of small displacements with the limitation on the motor torque; in the case of large displacements with the limitations on the engine torque and the speed of the mechanism. Analytical dependences for determination of parameters of the optimum performance diagrams of movement of the executive authority mechanism of elastic connection of the engine when limiting the engine torque: the duration of the ten stages of the diagram; the maximum value of the angular velocity of the mechanism; the minimum value of the angular velocity of the mechanism. Set the region of existence of the optimum performance diagrams of movement of the executive authority mechanism of elastic connection of the engine by limiting the torque of the engine, namely: the minimum possible value of the angle of rotation of the executive body of the mechanism and the maximum value of the angle of rotation of the executive body of the mechanism.

**Key words:** positional electric drive; elastic connection; chart movement of the executive body of the mechanism.