УДК 517.521

О СУММИРОВАНИИ РЯДА ОБОБЩЁННЫХ ПОЛИТОПИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ Q-ГО РОДА И K-ГО ПОРЯДКА

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

В середине семнадцатого века итальянский математик Пиетро Менголи впервые нашёл сумму бесконечного ряда обратных треугольных чисел, опередив на несколько десятилетий Гюйгенса, Лейбница и Якова Бернулли. Через 28 лет английский математик Уильямом Броункером нашёл сумму ряда, который по нашей терминологии получил название ряда обратных треугольных чисел второго порядка. На основе этих рядов нами было предложено семейство рядов, обобщающих ряд обратных политопных чисел, зависящее от двух натуральных параметров, получивших название род и порядок. Для всех допустимых значений этих двух параметров вычислена сумма такого ряда через интеграл. Для простейших случаев (значений параметра порядка 1, 2 и 3) интеграл вычислен в замкнутой форме.

Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, телескопический ряд, ряд обратных политопических чисел, политопические числа, обобщенные политопические числа.

1. Политопические числа. Как известно, *фигурные числа* [1-3] – это числа, равные числу некоторого множества одинаково расположенных пространственных точек, связанных с той или иной правильной геометрической фигурой. Если это множество точек образует правильный многоугольник, то соответствующее фигурное число называется *многоугольным*. Например, если эта фигура является правильным треугольником, то соответствующее число называется *треугольным*. Если это множество точек образует правильную треугольную пирамиду, то соответствующее число называется *тетраэдрическим числом*.

К сожалению, общепринятого понятия фигурных чисел и их деления на различные классы не существует и разные математики под фигурными числами понимают разные подмножества натуральных чисел. Само понятие фигурных чисел исторически восходит ещё к пифагорейцам. С ним, возможно, связаны известные выражения «возвести число в квадрат или в куб».

Среди фигурных чисел выделяют *q-политопические числа* [4] или *политопические числа q-го рода* $P_q(n)$. Дадим их определение:

Политопическим числом q-го рода называется натуральное число $P_q(n)$, *равное сумме первых n политопических чисел* $q-1$*-го рода, причём политопическое число* $P_1(n)$ *первого рода совпадает с натуральным числом n.*

Политопические числа иногда называют симплексными числами. Мы этот термин использовать в дальнейшем не будем.

Политопические числа первого рода называют так же *линейными числами.* Часть математиков считает, что линейные числа – это простые числа. Политопическим числом второго рода *или треугольным числом* $P_2(n)$ называется по определению сумма первых *n* натуральных чисел. В свою очередь политопическим числом третьего рода или *тетраэдрическим числом* $P_3(n)$ называется сумма первых *n* треугольных чисел $P_2(n)$, а политопическим числом четвёртого рода или *пентатопическим числом* или *пентахорическим числом* $P_4(n)$ называется сумма первых *n* тетраэдрических чисел $P_3(n)$.

Из этих определений получаем замкнутые выражения для упомянутых чисел через факториальные степени и биноминальные коэффициенты

$$P_1(n)=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n}{1!}=\frac{n^{\overline{1}}}{1!}=C_n^0,\quad n=1,2,3,\dots, \tag{1}$$

$$P_2(n)=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2!}=\frac{n^{\overline{2}}}{2!}=C_n^2,\quad n=1,2,3,\dots, \tag{2}$$

$$P_3(n)=\sum_{k=1}^{n}P_2(k)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}=\frac{n^{\overline{3}}}{3!}=C_n^3,\quad n=1,2,3,\dots, \tag{3}$$

$$P_4(n)=\sum_{k=1}^{n}P_3(k)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}=\frac{n^{\overline{4}}}{4!}=C_n^4,\quad n=1,2,3,\dots, \tag{4}$$

……………………………………………………………………………..,

$$P_q(n)=\sum_{k=1}^{n}P_{q-1}(k)=\frac{n(n+1)\dots(n+q-1)}{q!}=\frac{n^{\overline{q}}}{q!}=C_n^q,\quad n=1,2,3,\dots, \tag{5}$$

Для доказательства формул (1) – (5) достаточно воспользоваться следующими легко доказываемыми тождествами

$$1 = (k+1) - k,\ \ k = 1, 2, \ldots, n$$

$$k = \frac{k(k+1)}{2!} - \frac{(k-1)k}{2!},\ \ k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

$$\frac{k(k+1)}{2!} = \frac{k(k+1)(k+2)}{3!} - \frac{(k-1)k(k+1)}{3!},\ \ k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

$$\frac{k(k+1)(k+2)}{3!} = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!} - \frac{(k-1)k(k+1)(k+2)}{4!},\ \ k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{k^{\overline{q-1}}}{(q-1)!} = \frac{k^{\overline{q}}}{q!} - \frac{(k-1)^{\overline{q}}}{q!},\ \ k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Просуммировав по k от 1 до n, получим формулы (1) – (5)

$$P_1(n) = \sum_{k=1}^{n}\big((k+1) - k\big) = \frac{n}{1!} = \frac{n^{\overline{1}}}{1!}$$

$$P_2(n) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k(k+1)}{2!} - \frac{(k-1)k}{2!}\right) = \frac{n(n+1)}{2!} = \frac{n^{\overline{2}}}{2!}\,,$$

$$P_3(n) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k(k+1)(k+2)}{3!} - \frac{(k-1)k(k+1)}{3!}\right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} = \frac{n^{\overline{3}}}{3!}\,,$$

$$P_4(n) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!} - \frac{(k-1)k(k+1)(k+2)}{4!}\right) = \frac{n^{\overline{4}}}{4!}\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$P_q(n) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^{\overline{q}}}{q!} - \frac{(k-1)^{\overline{q}}}{q!}\right) = \frac{n^{\overline{q}}}{q!}\,.$$

Обобщённым политопическим числом q-рода и k-го порядка назовём натуральное число

$$P_{q,k}(n+1)=\frac{(kn+1)(kn+2)...(kn+q-1)}{q!},\quad n=0,1,2,3,\dots . \tag{6}$$

Нумеровать эти числа удобно целыми неотрицательными числами *n*, начиная с нуля. Хотя сам термин был введён нами в этой статье, обобщённые политопические числа (точнее числа обратные к обобщённым политопическим числам) встречались в математике уже несколько веков тому назад, без упоминания самого названия.

2. Сумма бесконечного ряда обратных политопических чисел. Ряд обратных натуральных чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...,$$

то есть политопических чисел первого рода, называется гармоническим рядом. Ещё в середине 14 века Николя Орезмзкий доказал его расходимость [5, 6]. Он же мог, если бы захотел, доказать своим методом расходимость ряда обратных обобщённых политопических чисел первого рода *k*-го порядка

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{kn+1}=1+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{3k+1}+...+\frac{1}{kn+1}+...,\ k=1,2,3,...$$

В 1650 году в сочинении «Новые арифметические квадратуры или о сложении дробей» [7, 8, 9] итальянский математик, профессор Болонского университета, Пиетро Менголи (1626 – 1686) нашёл сумму бесконечного ряда обратных треугольных чисел

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{P_2(n+1)}=\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+...+\frac{2}{(n+1)\cdot(n+2)}+...=2, \tag{7}$$

опередив на десятилетия Гюйгенса, Лейбница и Якова Бернулли. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}+...=1, \qquad (8)$$

с членами вдвое меньшими обратных треугольных чисел, получил название телескопического ряда или ряда Менголи [8].

В другом своём сочинении [8, 10], Менголи нашёл разложение в ряд для логарифма $\ln 2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{(-1)^n}{n+1}+...=\ln 2\,.$$

Если сгруппировать в этом ряде слагаемые парами, начиная с первого члена, то получим для логарифма следующий сходящийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+2)}+...=\ln 2\,, \qquad (9)$$

который представляет собой сумму ряда (8) без чётных членов. В таком виде ряд (9) был впервые опубликован в 1668 году Уильямом Броункером (1620 – 1684), первым президентом Лондонского королевского общества [8, 11].

Ряды (8) и (9), очевидно, является частными случаями более общего ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(kn+1)(kn+2)}=\frac{1}{1\cdot 2}+...+\frac{1}{(kn+1)\cdot(kn+2)}+..., \quad k=1,2,3,..., \qquad (10)$$

который мы назвали обобщённым рядом Менголи – Броункера или рядом Менголи – Броункера k-го порядка или рядом обратных треугольных чисел [12]. Суммы этого ряда для всех значений k найдены нами в серии работ [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19].

Так же нетрудно найти сумму бесконечного ряда обратных тетраэдрических чисел как сумму телескопического ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3!}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{P_3(1)}+\frac{1}{P_3(2)}+\frac{1}{P_3(3)}+...+\frac{1}{P_3(n)}+...=\frac{3}{2}\,. \qquad (11)$$

Нам не известно, кто вычислил её первым. Формула (11) приведена на странице сетевой энциклопедии ВикипедиИ в статье «Тетраэдрические числа» [20]. Вывод более общей формулы, чем формула (11), с членами в 6 раз меньшими, можно найти в книге [21]. В этом же виде формула приведена в справочниках [22, 23].

Ряд (11), очевидно, является частным случаем более общего сходящегося ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(kn+1)(kn+2)(kn+3)},\quad k=1,2,3,\dots,\tag{12}$$

который мы назвали рядом обратных обобщённых тетраэдрических чисел k-го порядка (Мы опускаем нормировочный множитель 3!) [24].

Мы можем, как и в случае рядов (11), найти сумму бесконечного ряда обратных пентатопических чисел

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4!}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{1}{P_4(1)}+\frac{1}{P_4(2)}+\dots+\frac{1}{P_4(n)}+\dots=\frac{4}{3}.\tag{13}$$

Нам так же не известно, кто вычислил её первым. Формула (13) приведена на странице сетевой энциклопедии ВикипедиИ в статье ”Pentatope number” [25].

Ряд (13) является частным случаем более общего сходящегося ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(kn+1)(kn+2)(kn+3)(kn+4)},\quad k=1,2,3,\dots,\tag{14}$$

который мы назовём рядом обратных обобщённых пентатопических чисел k-го порядка (Мы опускаем нормировочный множитель 4!).

Наконец, мы можем, как и в случае рядов (11), (13) и (14) найти сумму бесконечного ряда обратных фигурных чисел q-го рода, которые мы в **п. 1** назвали политопическими числами q-го рода [26]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{P_q(n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q!}{(n+1)(n+2)...(n+q)}=\frac{q}{q-1},\ q=2,3,\dots . \qquad (15)$$

Проще всего доказать формулу (15) методом математической индукции. Для значения $q=2$ эта формула верна (см. формулу (7)). Пусть она будет верна для некоторого натурального числа $q\geq 2$. Рассмотрим ряд в левой части формулы (15) для значения $q+1$. Тогда, очевидно, справедливо разложение

$$\frac{1}{P_{q+1}(n+1)}=\frac{(q+1)!}{(n+1)(n+2)...(n+q)(n+q+1)}=\frac{q+1}{q}\frac{q!}{(n+2)...(n+q)}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+q+1}\right)=\frac{q+1}{q}\left(\frac{q!}{(n+1)...(n+q)}-\frac{q!}{(n+2)...(n+q+1)}\right). \qquad (16)$$

Из формулы (16) следует, что ряд (15) телескопический с частичной суммой

$$S_k=\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{P_{q+1}(n+1)}=\frac{q+1}{q}\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{q!}{(n+1)...(n+q)}-\frac{q!}{(n+2)...(n+q+1)}\right)=$$

$$=\frac{q+1}{q}\left(1-\frac{q!}{(k+2)...(k+q+1)}\right).$$

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{q!}{(k+1)...(k+q)}=0$, то ряд (15) для значения $q+1$ сходится к сумме

$$S=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{P_{q+1}(n+1)}=\frac{q+1}{q}.$$

Следовательно, согласно методу математической индукции, формула (15) доказана.

3. Вычисление суммы ряда обратных обобщённых политопических чисел *q*-го рода *k*-го порядка через интеграл. Составим теперь ряд обратных обобщённых политопических чисел q-рода и k-го порядка, пользуясь формулой (6)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(kn+1)(kn+2)...(kn+q-1)(kn+q)}. \tag{17}$$

Покажем, что ряд (17) сходится для любых натуральных чисел $q \geq 2,\ k \geq 1$ и его сумма равна

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(kn+1)(kn+2)...(kn+q-1)(kn+q)}=\frac{1}{(q-1)!}\int_0^1\frac{(1-x)^{q-1}dx}{1-x^k}. \tag{18}$$

Докажем следующее тождество

$$\frac{1}{(t+1)(t+2)...(t+q-1)(t+q)}=\frac{1}{(q-1)!}\sum_{s=1}^{q}(-1)^{s-1}\frac{C_{q-1}^{s-1}}{t+s}, \tag{19}$$

где t – вещественное число, такое, что $t \neq -1,-2,-3,...,-q$. Для этого разложим правильную рациональную дробь в левой части (19) на простейшие дроби

$$\frac{1}{(t+1)(t+2)...(t+q-1)(t+q)}=\sum_{s=1}^{q}\frac{A_s}{t+s}, \tag{20}$$

и умножим левую и правую этого равенства на $t+r,\ r=1,2,\dots,q$. Тогда получим, переходя к пределу при $t \to -r$, что

$$\lim_{t\to -r}\frac{1}{(t+1)...(t+r-1)(t+r+1)...(t+q)}=\lim_{t\to -r}\sum_{s=1,s\neq r}^{q}\frac{A_s(t+r)}{t+s}+A_r$$

или

$$A_r=\frac{1}{(-r+1)(-r+2)...(-2)(-1)\cdot 1\cdot 2\cdot ...(q-r)}=\frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!(q-r)!}=\frac{(-1)^{r-1}C_{q-1}^{r-1}}{(q-1)!}.$$

Подставив это значение коэффициента в формулу (19), получим тождество (19).

Воспользуемся очевидным равенством

$$\frac{1}{t+s}=\int_0^1 x^{t+s-1}dx. \tag{21}$$

Полагая $t = nk$ и пользуясь тождеством (19), находим, что

$$\frac{1}{(kn+1)(kn+2)...(kn+q-1)(kn+q)} = \frac{1}{(q-1)!}\sum_{s=1}^{q}(-1)^{s-1}C_{q-1}^{s-1}\int_0^1 x^{kn+s-1}dx =$$

$$= \frac{1}{(q-1)!}\int_0^1 x^{kn}\left(\sum_{s-1=0}^{q-1}(-1)^{s-1}C_{q-1}^{s-1}x^{s-1}\right)dx = \frac{1}{(q-1)!}\int_0^1 x^{kn}\left(\sum_{s=0}^{q-1}(-1)^{s}C_{q-1}^{s}1^{q-1-s}x^{s}\right)dx .$$

Воспользовавшись биноминальной формулой

$$(1-x)^{q-1} = \sum_{s=0}^{q-1}(-1)^{s}C_{q-1}^{s}1^{q-1-s}x^{s} ,$$

получаем окончательно

$$\frac{1}{(kn+1)(kn+2)...(kn+q-1)(kn+q)} = \frac{1}{(q-1)!}\int_0^1 x^{kn}(1-x)^{q-1}dx . \qquad (22)$$

Вычислим теперь m-ю частичную сумму ряда (17)

$$S_m = \sum_{n=0}^{m}\frac{1}{(kn+1)(kn+2)...(kn+q-1)(kn+q)} = \frac{1}{(q-1)!}\sum_{n=0}^{m}\int_0^1 x^{kn}(1-x)^{q-1}dx =$$

$$= \frac{1}{(q-1)!}\int_0^1 (1-x)^{q-1}\sum_{n=0}^{m}x^{kn}dx = \frac{1}{(q-1)!}\int_0^1 (1-x)^{q-1}\frac{1-x^{km+k}}{1-x^{k}}dx =$$

$$= \frac{1}{(q-1)!}\int_0^1 \frac{(1-x)^{q-1}dx}{1-x^{k1}} - \frac{1}{(q-1)!}\int_0^1 \frac{(1-x)^{q-1}x^{km+k}dx}{1-x^{k}} .$$

Отсюда получаем оценку

$$0 \le \frac{1}{(q-1)!}\int_0^1 \frac{(1-x)^{q-1}dx}{1-x^{k}} - S_m = \frac{1}{(q-1)!}\int_0^1 \frac{(1-x)^{q-1}x^{km+k}dx}{1-x^{k}} \le$$

$$\le \int_0^1 \frac{x^{km+k}}{(q-1)!}dx \le \frac{1}{(q-1)!}\frac{1}{km+k+1} , \qquad (23)$$

где учтено, что

$$\frac{(1-x)^{q-1}x^{km+k}}{1-x^{k}} = \begin{cases} \dfrac{(1-x)^{q-2}x^{km+k}}{1+x+x^2+...+x^{k-1}} \le (1-x)^{q-2}x^{km+k} \le x^{km+k}, \ \textit{если} \ \ k>1 \\ (1-x)^{q-2}x^{km+k} \le x^{km+k}, \ \textit{если} \ \ k=1 \end{cases}$$

Переходя в неравенстве (23) к пределу при стремлении $m \to \infty$ и применяя теорему о двух милиционерах, получим сумму ряда (18)

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \frac{1}{(q-1)!}\int_0^1 \frac{(1-x)^{q-1}dx}{1-x^k} = \frac{1}{(q-1)!}\int_0^1 \frac{(1-x)^{q-2}dx}{1+x+x^2+...+x^{k-1}},\ q \ge 2, k \ge 1.$$

Замечание. В этой формуле для значения $k=1$ следует считать знаменатель равным 1.

С учётом этого замечания из последней формулы для значения $k=1$ вновь получаем формулу (15).

Заключение. Рассмотрен бесконечный ряд обобщённых фигурных чисел q-го рода k-го порядка для любых натуральных значений q и k. Показано, что бесконечный ряд обратных обобщённых фигурных чисел первого рода любого порядка расходится. В случае, когда род обобщённых фигурных чисел $q \ge 2$, вычислена сумма бесконечного ряда обобщённых чисел любого порядка через интеграл (см. формулу (18)). Для значений порядка $k=1,2$ суммы легко вычисляются

$$k=1, q\ge 2 \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)...(n+q)} = \frac{1}{(q-1)!}\int_0^1 (1-x)^{q-2}dx = \frac{1}{(q-1)!(q-1)},$$

или, умножая на $q!$, вновь получаем формулу (15)

$$k=1, q\ge 2 \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q!}{(n+1)(n+2)...(n+q)} = \frac{q!}{(q-1)!}\int_0^1 (1-x)^{q-2}dx = \frac{q}{q-1}.$$

$$k=2, q=2 \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2,$$

$$k=2, q\ge 3 \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)...(2n+q)} = \frac{1}{(q-1)!}\int_0^1 \frac{(1-x)^{q-2}dx}{1+x}\Bigg|_{t=x+1} =$$

$$= \frac{1}{(q-1)!}\int_1^2 \frac{(2-t)^{q-2}dt}{t} = \frac{1}{(q-1)!}\int_1^2 \sum_{m=0}^{q-2}(-1)^m C_{q-2}^{q-2-m} 2^{q-2-m} t^{m-1}dt =$$

$$= \frac{2^{q-2}}{(q-1)!}\ln 2 + \frac{2^{q-2}}{(q-1)!}\sum_{m=1}^{q-2}(-1)^m C_{q-2}^{q-2-m}\frac{1-2^{-m}}{m}.$$

Для значения $k=3$ и $q=2,3$ и 4 суммы рядов так же вычисляются:

$$k=3, q=2 \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x\cos\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}+\sin^2\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\left(x+\cos\frac{\pi}{3}\right)^2+\sin^2\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1+\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} - \operatorname{arctg}\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

$$k=3, q=3 \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-x)dx}{1+x+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\left(3/2-1/2-x\right)dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} - \frac{1}{4}\ln 3 = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} - \frac{\ln 3}{4}.$$

$k=3, q=4$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)(3n+4)} = \frac{1}{3!}\int_0^1 \frac{(1-x)^2\,dx}{1+x+x^2} = \frac{1}{6}\int_0^1 \left(1-\frac{3x}{x^2+x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x+1/2)dx}{(x+1/2)^2+3/4} + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\ln 3 +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\ln 3 + \frac{\pi\sqrt{3}}{36}.$$

Целью наших дальнейших исследований будет нахождение суммы ряда обратных обобщённых политопических чисел q-го рода для всех значений k.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dickson L.E. History of the theory of numbers. Vol.2. Diophantine Analysis. – N.Y.: Chelsea Publ. Co., 1923. – XXV+803 p.

2. Guy R.K. "Figurate Numbers." §D3 in Unsolved Problems in Number Theory, 2-nd ed. New York: Springer-Verlag, 1994, pp. 147-150.

3. Conway J.H., Guy R.K. The Book of Numbers. – N. Y.: Springer-Verlag, 1996 pp. 30 – 62.

4. Figurate Numbers, URL: http://mathworld.wolfram.com/FigurateNumber .html.

5. История математики. В трёх томах. Под ред. А.П. Юшкевича. Т1. С древнейших времен до начала нового времени. – М.: Наука, 1970. – 300 с. С древнейших времен до начала нового времени. – М.: Наука, 1970. – 352 с.

6. Stillwell J. Mathematics and Its History. 3rd ed. – N.Y.: Springer, 2010, – XIII+660 p. (Имеется перевод со 2-го англ. издания: Стиллвелл Д. Математика и ее история. Москва - Ижевск: ИКИ, 2004. – 529 с.)

7. Mengoli Pietro. Novae quadraturae arithmeticae, seu De additione fractionum. – Bononiae: Ex typographia Iacobi Montij, 1650.

8. История математики. Т2. Математика XVII столетия. Под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 301 с.

9. Cajori F. A History of Mathematics. 2-nd ed. – L.: Macmillan & Co., Ltd, 1919, p. 173.

10. Mengoli Pietro. Geometriae speciosae elementa. – Bononiae, 1659.

11. Brouncker W. The squaring of the Hyperbola by an infinite series of rational numbers. Philos. Trans., 1668.

12. Терещенко И.В. О суммировании ряда Менголи - Броункера *k*-го порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/546.

13. Терещенко И.В. О суммировании ряда Менголи - Броункера 5-го порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/571.

14. Терещенко И.В. О еще одном способе суммирования ряда Менголи - Броункера 5-го порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/607.

15. Терещенко И.В. О суммировании ряда Менголи - Броункера 6-го порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/608.

16. Терещенко И.В. О суммирования ряда Менголи - Броункера 8-го порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 11. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/616.

17. Терещенко И.В. О еще одном способе суммирования ряда Менголи - Броункера 8-го порядка. [Электронный ресур6с] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 11. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/628.

18. Терещенко И.В. О суммировании ряда Менголи - Броункера нечётного порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 11. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/631.

19. Терещенко И.В. О суммировании ряда Менголи - Броункера чётного порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 11. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/633.

20. Тетраэдрические числа – ВикипедиЯ. Свободная энциклопедия – [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Тетраэдри ческие_числа.

21. Фихтенгольц М.Г. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Т.2. 9-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2009. – 800 с.

22. Adams E.P. and Hippisley R.L. Smithsonian Mathematical Formulae and Tables of Elliptic Functions, Smithsonian Institute, Washington, D.C., 1922.

23. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, рядов и произведений. 7-е изд. Перевод с английского В.В. Максимова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 1232 с.

24. Терещенко И.В. О суммировании ряда обратных обобщённых тетраэдрических чисел *k*-го порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 12. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/710.

25. Pentatope number - Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Pentatope_ number.

26. Rockett A.M. Sums of The Inverses of Binomial Coefficients. Fibonacci Quarterly 19 (5) December 1981, pp. 433-437.

27. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 800 с.

REFERENCES

1. Dickson L.E. History of the theory of numbers. Vol.2. Diophantine Analysis. – N.Y.: Chelsea Publ. Co., 1923. – XXV+803 p.

2. Guy R.K. "Figurate Numbers." §D3 in Unsolved Problems in Number Theory, 2-nd ed. New York: Springer-Verlag, 1994, pp. 147-150.

3. Conway J.H., Guy R.K. The Book of Numbers. – N. Y.: Springer-Verlag, 1996 pp. 30 – 62.

4. Figurate Numbers, URL: http://mathworld.wolfram.com/FigurateNumber .html.

5. Istoriya matematiki. V trekh tomakh. Pod red. A.P. Yushkevicha. T1. S drevneyshikh vremen do nachala novogo vremeni. – M.: Nauka, 1970. – 300 s. S drevneyshikh vremen do nachala novogo vremeni. – M.: Nauka, 1970. – 352 s.

6. Stillwell J. Mathematics and Its History. 3rd ed. – N.Y.: Springer, 2010, – XIII+660 p. (Imeetsya perevod so 2-go angl. izdaniya: Stillvell D. Matematika i ee istoriya. Moskva - Izhevsk: IKI, 2004. – 529 s.)

7. Mengoli Pietro. Novae quadraturae arithmeticae, seu De additione fractionum. – Bononiae: Ex typographia Iacobi Montij, 1650.

8. Istoriya matematiki. T2. Matematika XVII stoletiya. Pod red. A.P. Yushkevicha. – M.: Nauka, 1970. – 301 s.

9. Cajori F. A History of Mathematics. 2-nd ed. – L.: Macmillan & Co., Ltd, 1919, p. 173.

10. Mengoli Pietro. Geometriae speciosae elementa. – Bononiae, 1659.

11. Brouncker W. The squaring of the Hyperbola by an infinite series of rational numbers. Philos. Trans., 1668.

12. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada Mengoli - Brounkera k-go poryadka. [Elektronnyy resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/546.

13. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada Mengoli - Brounkera 5-go poryadka. [Elektronnyy resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/571.

14. Tereshchenko I.V. O eshche odnom sposobe summirovaniya ryada Mengoli - Brounkera 5-go poryadka. [Elektronnyy resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/607.

15. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada Mengoli - Brounkera 6-go poryadka. [Elektronnyy resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/608.

16. Tereshchenko I.V. O summirovaniya ryada Mengoli - Brounkera 8-go poryadka. [Elektronnyy resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 11. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/616.

17. Tereshchenko I.V. O eshche odnom sposobe summirovaniya ryada Mengoli - Brounkera 8-go poryadka. [Elektronnyy resur6s] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 11. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/628.

18. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada Mengoli - Brounkera nechetnogo poryadka. [Elektronnyy resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 11. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/631.

19. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada Mengoli - Brounkera chetnogo poryadka. [Elektronnyy resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 11. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/633.

20. Tetraedricheskie chisla – VikipediYa. Svobodnaya entsiklopediya – [Elektronnyy resurs] – Rezhim dostupa: https://ru.wikipedia.org/wiki/Tetraedri cheskie_chisla.

21. Fikhtengolts M.G. Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya. V 3-kh tt. T.2. 9-e izd., ster. – SPb.: Lan, 2009. – 800 s.

22. Adams E.P. and Hippisley R.L. Smithsonian Mathematical Formulae and Tables of Elliptic Functions, Smithsonian Institute, Washington, D.C., 1922.

23. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tablitsy integralov, ryadov i proizvedeniy. 7-e izd. Perevod s angliyskogo V.V. Maksimova. – SPb.: BKhV-Peterburg, 2011. – 1232 s.

24. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada obratnykh obobshchennykh tetraedricheskikh chisel k-go poryadka. [Elektronnyy resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 12. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/710.

25. Pentatope number - Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Pentatope_ number.

26. Rockett A.M. Sums of The Inverses of Binomial Coefficients. Fibonacci Quarterly 19 (5) December 1981, pp. 433-437.

27. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integraly i ryady. – M.: Nauka, Gl. red. fiz.-mat. lit., 1981. – 800 s.

ON THE SUMMATION OF THE INFINITE SERIES OF THE GENERALIZING POLITOPICAL NUMBERS' RECIPROCALS OF THE Q-TH KIND AND K-TH ORDER

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

In the middle of the seventeenth century Italian mathematician Pietro Mengoli first found the sum of an infinite number of reverse triangular numbers, ahead of several decades of Huygens, Leibniz and Jacob Bernoulli. Through 28 years, the English mathematician William Brouncker found the sum of the series, which in our terminology is called the series of the inverse triangular numbers of the second order. On the basis of these series we were invited to a family of series, summarizing a series of inverse politopical numbers, depending on the two natural parameters, known as the kind and the order. For all admissible values of these two parameters the sum of such series was calculated in the terms of the integral. For simple cases (the parameter values of the order of 1, 2 and 3) the integral was calculated in closed form.
Key words: infinite series, telescopic series, infinite series of the reciprocals of the polytopic numbers, polytopic numbers, generalized polytopic numbers.