УДК 517.521

О СУММИРОВАНИИ РЯДА ОБРАТНЫХ ТЕТРАЭДРИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ ЧЁТНОГО ПОРЯДКА

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Рассмотрен ряд обобщённых тетраэдрических чисел произвольного чётного порядка. Предложен прямой метод вычисления определённого интеграла, величина которого равна сумме этого ряда, основанный на разложении подынтегральной рациональной функции на простейшие рациональные дроби. Найдены коэффициенты этого разложения. Показано, что сумма ряда выражается в замкнутой форме через элементарные функции. Приведены подробные вычисления значения суммы ряда для чётных порядков 2, 4, 6, 8 и 10.

Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, ряд обобщённых тетраэдрических чисел *k*-го порядка, ряд обобщённых тетраэдрических чисел чётного порядка, сумма ряда, рациональная функция, тетраэдрические числа.

1. Ряд обратных обобщённых тетраэдрических чисел чётного порядка. В нашей работе [1] бесконечный положительный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(kn+1)(kn+2)(kn+3)}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-x)dx}{1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}},\quad k=1,2,3,\ldots. \tag{1}$$

получил название ряда обратных обобщённых тетраэдрических чисел *k*-го порядка. Из формулы (1) следует, что в случае чётного порядка $k=2m$, где $m=1,2,3,\ldots$, ряд (1) сходится к сумме

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2mn+1)(2mn+2)(2mn+3)}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-x)dx}{1+x+\ldots+x^{2m-2}+x^{2m-1}}. \tag{2}$$

Интеграл в правой части, равный сумме ряда в левой части формулы (2), был вычислен нами для значений:

$k=2$ (см. [1])

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1-x}{1+x}dx=\ln 2-\frac{1}{2}. \tag{3}$$

$k=4$ (см. [1])

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-x)dx}{1+x+x^2+x^3}=\frac{\ln 2}{4}, \tag{4}$$

$k=6$ (см. [2])

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(6n+1)(6n+2)(6n+3)}=\int_0^1\frac{\frac{1-x}{2}dx}{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}=\frac{\ln 2}{3}-\frac{\ln 3}{8}+\frac{\pi\sqrt{3}}{72}. \tag{5}$$

$k=8$ (см. [3])

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(8n+1)(8n+2)(8n+3)}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-x)dx}{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7}=$$

$$=\frac{\ln 2}{8}+\frac{\pi\left(\sqrt{2}-1\right)}{16}. \tag{6}$$

Целью данной работы является вычисление интеграла (2) для произвольного натурального числа m и нахождение суммы ряда (1) для произвольного чётного порядка $k>2$.

2. Вычисление суммы ряда обратных обобщённых тетраэдрических чисел чётного порядка. Для вычисления интеграла (2) воспользуемся приёмами, изложенными в [4]. Найдём корни многочлена, стоящего в знаменателе в формуле (2). Для этого решим уравнение

$$x^{2m-1}+x^{2m-2}+\ldots+x^2+x+1=0,\quad m=1,2,3,\ldots, \tag{7}$$

Очевидно, что $x=1$ не является корнем этого уравнения. Умножая его на разность $x-1$, получим равносильное уравнение

$$(x-1)(x^{2m-1}+x^{2m-2}+\ldots+x^2+x+1)=0,\quad x\neq 1,$$

или

$$x^{2m}-1=0,\quad x\neq 1. \tag{8}$$

Корни этого уравнения являются комплексными корнями степени $2m$ из единицы

$$x_k = \sqrt[2m]{1}_k = e^{i\frac{\pi k}{m}}, \quad k = 1, 2, 3, ..., 2m-1. \tag{9}$$

Следовательно, справедливо разложение

$$x^{2m-1} + x^{2m-2} + ... + x^2 + x + 1 = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{2m-2})(x - x_{2m-1}). \tag{10}$$

Тогда подынтегральную функцию в интеграле (2) можно разложить на простейшие рациональные дроби

$$\frac{\frac{1-x}{2}}{1 + x + x^2 + ... + x^{2m-1} + x^{2m-1}} = \frac{-\frac{(1-x)^2}{2}}{x^{2m} - 1} = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{n=1}^{2m-1} \frac{A_n}{x - x_n}, \quad x \neq 1. \tag{11}$$

Умножив левую и правую часть этого равенства для каждого значения $s = 1, 2, 3, ..., 2m-1$ на разность $x - x_s$ и, переходя к пределу при $x \to x_s$, получим

$$\lim_{x \to x_s} \frac{P(x)}{\frac{Q(x) - Q(x_s)}{x - x_s}} = \frac{P(x_s)}{Q'(x_s)} = \frac{-\frac{(1-x_s)^2}{2}}{2m x_s^{2m-1}} = A_s + \lim_{x \to x_s} \left(x - x_s \right) \sum_{n=1, n \neq s}^{2m-1} \frac{A_n}{x - x_n}, \quad x \neq 1.$$

Так как $\lim_{x \to x_s} \left(x - x_s \right) \sum_{n=1, n \neq s}^{2m-1} \frac{A_n}{x - x_n} = 0$, то из последнего равенства находим все коэффициенты разложения (11)

$$A_n = -\frac{(1-x_n)^2}{2 \cdot 2m x_n^{2m-1}} = -\frac{(1-x_n)^2 x_n}{4m x_n^{2m}} = -\frac{(1-x_n)^2 x_n}{4m}, \quad n = 1, 2, ..., 2m-1. \tag{12}$$

Перейдём от корней (9) к их комплексно сопряженным значениям

$$x_k^* = e^{-i\frac{\pi k}{m}} = e^{i2\pi} e^{-i\frac{\pi k}{m}} = e^{i\frac{\pi(2m-k)}{m}} = x_{2m-k}, \quad k = 1, 2, 3, ..., 2m-1. \tag{13}$$

Из формулы (13) следует, что эти корни образуют комплексно сопряжённые пары

$$x_1^* = x_{2m-1}, \quad x_2^* = x_{2m-2}, \dots, \quad x_{m-1}^* = x_{2m-m+1} = x_{m+1}, \quad x_m = e^{i\pi} = -1, \tag{14}$$

и удовлетворяют соотношениям

$$x_k + x_k^* = e^{i\frac{\pi k}{m}} + e^{-i\frac{\pi k}{m}} = 2\cos\frac{\pi k}{m}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m-1, \tag{15}$$

$$x_k x_k^* = 1, \quad x_k = x_1^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, 2m-1 \tag{16}$$

Используя формулы (14), перепишем формулу (10), то есть разложение многочлена $x^{2m-1} + x^{2m-2} + \dots + x^2 + x + 1$ на множители, следующим образом

$$x^{2m-1} + \dots + x + 1 = (x - x_1)(x - x_1^*)\dots(x - x_{m-1})(x - x_{m-1}^*)(x+1). \tag{17}$$

Заметим, что из формул (14) следует, что коэффициенты, задаваемые формулой (12), образуют комплексно сопряжённые пары

$$A_n = -\frac{(1-x_n)^2}{2\cdot 2m x_n^{2m-1}} = -\frac{(1-x_n)^2 x_n}{4m x_n^{2m}} = -\frac{(1-x_n)^2 x_n}{4m}, \quad n = 1, 2, \dots, 2m-1,$$

$$A_k^* = -\frac{(1-x_k^*)^2 x_k^*}{4m} = -\frac{(1-x_{2m-k})^2 x_{2m-k}}{4m} = A_{2m-k}, \quad k = 1, \dots, m-1, \quad A_m = \frac{1}{m}. \tag{18}$$

Теперь мы можем переписать разложение (11) следующим образом

$$\frac{\frac{1-x}{2}}{1 + x + \dots + x^{2m-2} + x^{2m-1}} = \sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{A_k}{x - x_k} + \frac{A_k^*}{x - x_k^*}\right) + \frac{1}{m}\frac{1}{x+1}$$

или

$$\frac{\frac{1-x}{2}}{1 + x + \dots + x^{2m-2} + x^{2m-1}} = \sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{A_n(x - x_n^*) + A_n^*(x - x_n)}{(x - x_n)(x - x_n^*)}\right) + \frac{1}{m}\frac{1}{x+1}.$$

Так как согласно формулам (16) $x_1 x_1^* = \ldots = x_{m-1} x_{m-1}^* = 1$, то отсюда получаем

$$\frac{\frac{1-x}{2}}{1+x+\ldots+x^{2m-2}+x^{2m-1}} = \sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{(A_n + A_n^*)x - (A_n x_n^* + A_n^* x_n)}{x^2 - (x_n + x_n^*)x + 1}\right) + \frac{1}{m}\frac{1}{x+1}$$

или

$$\frac{\frac{1-x}{2}}{1+x+\ldots+x^{2m-2}+x^{2m-1}} = \sum_{n=1}^{m-1}(A_n + A_n^*)\frac{x - \frac{(A_n x_n^* + A_n^* x_n)}{(A_n + A_k^*)}}{x^2 - (x_n + x_n^*)x + 1} + \frac{1}{m}\frac{1}{x+1}.$$

Отсюда

$$\frac{\frac{1-x}{2}}{1+\ldots+x^{2m-1}} = \sum_{k=1}^{m-1}(A_k + A_k^*)\frac{x - \frac{x_k + x_k^*}{2} + \frac{x_k + x_k^*}{2} - \frac{(A_k x_k^* + A_k^* x_k)}{(A_k + A_k^*)}}{x^2 - (x_k + x_k^*)x + 1} + \frac{1}{m}\frac{1}{x+1}.$$

Из последнего равенства получаем

$$\frac{\frac{1-x}{2}}{1+\ldots+x^{2m-1}} = \sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_k + A_k^*}{2}\frac{2x - x_k - x_k^*}{x^2 - (x_k + x_k^*)x + 1} + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{\frac{A_k - A_k^*}{2}(x_k - x_k^*)}{x^2 - (x_k + x_k^*)x + 1} + \frac{1}{m}\frac{1}{x+1}$$

или

$$\frac{\frac{1-x}{2}}{1+\ldots+x^{2m-1}} = \sum_{k=1}^{m-1}B_k\frac{2x - x_k - x_k^*}{x^2 - (x_k + x_k^*)x + 1} + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{C_k}{x^2 - (x_k + x_k^*)x + 1} + \frac{1}{m}\frac{1}{x+1}, \quad (19)$$

где

$$B_k = \frac{A_k + A_k^*}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \quad (20)$$

$$C_k = \frac{(A_k - A_k^*)(x_k - x_k^*)}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1. \quad (21)$$

Подставляя разложение (19) в интеграл (2), получим

$$\int_0^1 \frac{\frac{1-x}{2}dx}{1+\ldots+x^{2m-1}} = \sum_{k=1}^{m-1}\left(B_k \ln\left(2-(x_k+x_k^*)\right)+\int_0^1 \frac{C_k dx}{x^2-(x_k+x_k^*)x+1}\right)+\frac{1}{m}\int_0^1 \frac{dx}{x+1}. \quad (22)$$

Учитывая формулу (15) вычислим интеграл в правой части формулы (22), зная что $0<\frac{\pi n}{m}<\pi, \quad n=1,2,\ldots,m-1$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-(x_k+x_k^*)x+1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-2x\cos\frac{\pi k}{m}+\cos^2\frac{\pi k}{m}+\sin^2\frac{\pi k}{m}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\left(x-\cos\frac{\pi k}{m}\right)^2+\sin^2\frac{\pi k}{m}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi k}{m}} \operatorname{arctg} \frac{x-\cos\frac{\pi k}{m}}{\sin\frac{\pi k}{m}}\Bigg|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{\pi k}{m}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos\frac{\pi k}{m}}{\sin\frac{\pi k}{m}}+\operatorname{arctg}\frac{\cos\frac{\pi k}{m}}{\sin\frac{\pi k}{m}}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{\pi k}{2m}+\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{m}}{\sin\frac{\pi k}{m}} = \frac{\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{\pi k}{2m+1}+\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi k}{m}\right)}{\sin\frac{\pi k}{m}} =$$

$$= \frac{\frac{\pi k}{2m}+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi k}{m}\right)}{\sin\frac{\pi k}{m}} = \frac{\pi-\frac{\pi k}{m}}{2\sin\frac{\pi k}{m}}. \quad (23)$$

Теперь перепишем интеграл (22), воспользовавшись формулами (15) и (23)

$$\int_0^1 \frac{\frac{1-x}{2}dx}{1+x+\ldots+x^{2m-1}} = \sum_{k=1}^{m-1}\left(2B_k \ln\left(2\sin\frac{\pi k}{2m}\right)+C_k\frac{\pi-\frac{\pi k}{m}}{2\sin\frac{\pi k}{m}}\right)+\frac{\ln 2}{m} \quad (24)$$

и выразим величины B_k и C_k с помощью формул (9), (12), (18), (20), (21)

$$B_k=-\frac{(x_k-1)^2x_k+(x_k^*-1)^2x_k^*}{8m}=-\frac{(x_k^3+x_k^{*3})^2-2(x_k^2+x_k^{*2})+(x_k+x_k^*)}{8m}=$$

$$=-\frac{(x_k^3+x_k^{*3})^2-2(x_k^2+x_k^{*2})+(x_k+x_k^*)}{8m}=$$

$$=-\frac{(x_k+x_k^*)(x_k^2-1+x_k^{*2})-2(x_k^2+x_k^{*2})+(x_k+x_k^*)}{8m}=$$

$$=-\frac{(x_k+x_k^*-2)(x_k^2+x_k^{*2})}{4m}=\frac{(2-x_k-x_k^*)((x_k+x_k^*)^2-2)}{8m} \qquad (25)$$

$$C_k=-\frac{(x_k(x_k-1)^2-x_k^*(x_k^*-1)^2)(x_k-x_k^*)}{8m}=\frac{(2-x_k-x_k^*)(x_k+x_k^*)(x_k-x_k^*)^2}{8m}, \qquad (26)$$

где $k=1,2,\dots,m-1$.

Отсюда

$$B_k=\frac{\cos\frac{2\pi k}{m}\sin^2\frac{\pi k}{2m}}{m},\quad k=1,2,\dots,m-1. \qquad (26)$$

$$C_k=-\frac{4\cos\frac{\pi k}{m}\sin^2\frac{\pi k}{m}\sin^2\frac{\pi k}{2m}}{m},\quad k=1,2,\dots,m-1. \qquad (27)$$

Используя формулы (26) и (27) находим значение интеграла (24)

$$\int_0^1\frac{\frac{1-x}{2}dx}{1+x+\dots+x^{2m-2}+x^{2m-1}}=\frac{\ln 2}{m}+\frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m-1}\cos\frac{2\pi k}{m}\sin^2\frac{\pi k}{2m}\ln\left(2\sin\frac{\pi k}{2m}\right)-$$

$$-\frac{\pi}{m^2}\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)\sin\frac{2\pi k}{m}\sin^2\frac{\pi k}{2m}, \qquad (28)$$

и сумму ряда (1) для $k=2m$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2mn+1)(2mn+2)(2mn+3)}=\frac{\ln 2}{m}+\frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m-1}\cos\frac{2\pi k}{m}\sin^2\frac{\pi k}{2m}\ln\left(2\sin\frac{\pi k}{2m}\right)-$$

$$-\frac{\pi}{m^2}\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)\sin\frac{2\pi k}{m}\sin^2\frac{\pi k}{2m}. \qquad (29)$$

В качестве примера, вычислим суммы ряда (1) для значений $k=4, 6, 8$ и 10. Поскольку $k=2m$, то в этом случае имеем, соответственно, $m=2, 3, 4$ и 5. Тогда из (29) получаем

$m=2$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}=\frac{\ln 2}{2}+\cos\pi\sin^2\frac{\pi}{4}\ln\left(2\sin\frac{\pi}{4}\right)-$$

$$-\frac{\pi}{4}\sin\pi\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{\ln 2}{2},$$

то есть формулу (3).

$m=3$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(6n+1)(6n+2)(6n+3)}=\frac{\ln 2}{3}+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{2}\cos\frac{2\pi k}{3}\sin^2\frac{\pi k}{6}\ln\left(2\sin\frac{\pi k}{6}\right)-$$

$$-\frac{\pi}{9}\sum_{k=1}^{2}(3-k)\sin\frac{2\pi k}{3}\sin^2\frac{\pi k}{6}=\frac{\ln 2}{3}+\frac{2}{3}\cos\frac{2\pi}{3}\sin^2\frac{\pi}{6}\ln\left(2\sin\frac{\pi}{6}\right)+$$

$$+\frac{2}{3}\cos\frac{4\pi}{3}\sin^2\frac{\pi}{3}\ln\left(2\sin\frac{\pi}{3}\right)-\frac{2\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{3}\sin^2\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{3}\sin^2\frac{\pi}{3}=$$

$$\frac{\ln 2}{3}-\frac{\ln 3}{8}+\frac{\pi\sqrt{3}}{72},$$

то есть получаем формулу (4).

$m=4$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(8n+1)(8n+2)(8n+3)}=\frac{\ln 2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\cos\frac{\pi k}{2}\sin^2\frac{\pi k}{8}\ln\left(2\sin\frac{\pi k}{8}\right)-$$

$$-\frac{\pi}{16}\sum_{k=1}^{3}(4-k)\sin\frac{\pi k}{2}\sin^2\frac{\pi k}{8}=\frac{\ln 2}{4}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}\sin^2\frac{\pi}{8}\ln\left(2\sin\frac{\pi}{8}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\cos\pi\sin^2\frac{\pi}{4}\ln\left(2\sin\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{2}\sin^2\frac{3\pi}{8}\ln\left(2\sin\frac{3\pi}{8}\right)-$$

$$-\frac{3\pi}{16}\sin\frac{\pi}{2}\sin^2\frac{\pi}{8}-\frac{2\pi}{16}\sin\pi\sin^2\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{16}\sin\frac{3\pi}{2}\sin^2\frac{3\pi}{8}=\frac{\ln 2}{8}+\frac{\pi\left(\sqrt{2}-1\right)}{16},$$

то есть получаем формулу (4).

$m=5$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(10n+1)(10n+2)(10n+3)}=\frac{\ln 2}{5}+\frac{2}{5}\sum_{k=1}^{4}\cos\frac{2\pi k}{5}\sin^2\frac{\pi k}{10}\ln\left(2\sin\frac{\pi k}{10}\right)-$$

$$-\frac{\pi}{25}\sum_{k=1}^{4}(5-k)\sin\frac{2\pi k}{5}\sin^2\frac{\pi k}{10}. \qquad (30)$$

Так как

$$\sin^2\frac{\pi k}{10}=\frac{1-\cos\frac{\pi k}{5}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4},\ \cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4},\ \cos\frac{3\pi}{5}=-\frac{\sqrt{5}-1}{4},\ \cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

$$\cos\frac{6\pi}{5}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4},\ \cos\frac{8\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

$$\sin^2\frac{\pi}{10}=\frac{3-\sqrt{5}}{8},\ \sin^2\frac{2\pi}{10}=\frac{5-\sqrt{5}}{8},\ \sin^2\frac{3\pi}{10}=\frac{3+\sqrt{5}}{8},\ \sin^2\frac{4\pi}{10}=\frac{5+\sqrt{5}}{8},$$

$$\sin\frac{\pi}{10}=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}},\ \sin\frac{2\pi}{10}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},\ \sin\frac{3\pi}{10}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}},\ \sin\frac{4\pi}{10}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},$$

$$\sin\frac{2\pi}{5}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},\ \sin\frac{4\pi}{5}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},\ \sin\frac{6\pi}{5}=-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},\ \sin\frac{8\pi}{5}=-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},$$

то

$$\frac{2}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\sin^2\frac{\pi}{10}\ln\left(2\sin\frac{\pi}{10}\right)=-\frac{\sqrt{5}-2}{40}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right),$$

$$\frac{2}{5}\cos\frac{4\pi}{5}\sin^2\frac{2\pi}{10}\ln\left(2\sin\frac{2\pi}{10}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{40}\ln\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right),$$

$$\frac{2}{5}\cos\frac{6\pi}{5}\sin^2\frac{3\pi}{10}\ln\left(2\sin\frac{3\pi}{10}\right)=-\frac{\sqrt{5}+2}{40}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right),$$

$$\frac{2}{5}\cos\frac{8\pi}{5}\sin^2\frac{4\pi}{10}\ln\left(2\sin\frac{4\pi}{10}\right)=\frac{\sqrt{5}}{40}\ln\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right),$$

$$\frac{4\pi}{25}\sin\frac{2\pi}{5}\sin^2\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{50}\sqrt{5-2\sqrt{5}},$$

$$\frac{3\pi}{25}\sin\frac{4\pi}{5}\sin^2\frac{2\pi}{10}=\frac{3\pi}{200}\sqrt{25-10\sqrt{5}},$$

$$\frac{2\pi}{25}\sin\frac{6\pi}{5}\sin^2\frac{3\pi}{10}=-\frac{\pi}{100}\sqrt{5+2\sqrt{5}},$$

$$\frac{\pi}{25}\sin\frac{8\pi}{5}\sin^2\frac{4\pi}{10}=-\frac{\pi}{200}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$$

Отсюда получаем

$$\frac{2}{5}\sum_{k=1}^{4}\cos\frac{2\pi k}{5}\sin^2\frac{\pi k}{10}\ln\left(2\sin\frac{\pi k}{10}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{20}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)+\frac{\sqrt{5}}{40}\ln\left(\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right)=$$

$$=-\frac{\sqrt{5}}{20}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)+\frac{\sqrt{5}}{40}\ln\left(\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{40}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right). \quad (31)$$

$$\frac{\pi}{25}\sum_{k=1}^{4}(5-k)\sin\frac{2\pi k}{5}\sin^2\frac{\pi k}{10}=\frac{\pi}{200}\left(4\sqrt{5-2\sqrt{5}}+3\sqrt{25-10\sqrt{5}}\right)-$$

$$-\frac{\pi}{200}\left(2\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right)=\frac{\pi}{200}\left(4+3\sqrt{5}\right)\sqrt{5-2\sqrt{5}}-$$

$$-\frac{\pi}{200}\left(2+\sqrt{5}\right)\sqrt{5+2\sqrt{5}}=\frac{\pi\left(\sqrt{\left(4+3\sqrt{5}\right)^2\left(5-2\sqrt{5}\right)}-\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)^2\left(5+2\sqrt{5}\right)}\right)}{200}=$$

$$\frac{\pi}{200}\left(\sqrt{65-2\sqrt{5}}-\sqrt{85+38\sqrt{5}}\right). \quad (32)$$

Подставив формулы (31) и (32) в формулу (30),найдём сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(10n+1)(10n+2)(10n+3)}=\frac{\ln 2}{5}-\frac{\sqrt{5}}{40}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)+$$

$$+\frac{\pi}{200}\left(\sqrt{65-2\sqrt{5}}-\sqrt{85+38\sqrt{5}}\right).$$

Заключение. Рассмотрен ряд обратных обобщённых тетраэдрических чисел чётного порядка $2m$, $m=1,2,3,\ldots$. Вычислена его сумма для любого m (см. формулу (28)). Этот ряд и его сумма отсутствует в известных математических справочниках [5-8].

Целью наших дальнейших исследований будет нахождение суммы ряда обратных обобщённых пентатопических чисел чётного порядка $2m$ для любого натурального m.

ЛИТЕРАТУРА

1. Терещенко И.В. О суммировании ряда обобщённых тетраэдрических чисел k-го порядка. // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 12. - [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://ntk.kubstu.ru/file/710.

2. Терещенко И.В. О суммировании ряда обратных обобщенных тетраэдрических чисел 6-го порядка. // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 13. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://ntk.kubstu.ru/file/732.

3. Терещенко И.В. О суммировании ряда обратных обобщенных тетраэдрических чисел 8-го порядка. // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2016. № 1. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://ntk.kubstu.ru/file/776.

4. Тимофеев А.Ф. Интегрирование функций. М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. – 433 с.

5. Смолянский М.Л. Таблицы неопределённых интегралов. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 108 с.

6. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Перевод с английского Н.В. Леви. – М. Наука, гл. ред. физ. – мат. лит., 1983. – 176 с.

7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М. Наука, Uл. ред. физ. – мат. лит., 1981. – 800 с.

8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, рядов и произведений. 7-е изд. Перевод с английского В.В. Максимова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 1232 с.

REFERENCES

1. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada obobshchennykh tetraedricheskikh chisel k-go poryadka. // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 12. - [Elektronnyy resurs] – Rezhim dostupa: http://ntk.kubstu.ru/file/710.

2. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada obratnykh obobshchennykh tetraedricheskikh chisel 6-go poryadka. // Nauchnye trudy KubGTU: elektron.

setevoy politematich. zhurn. 2015. № 13. [Elektronnyy resurs] – Rezhim dostupa: http://ntk.kubstu.ru/file/732.

3. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada obratnykh obobshchennykh tetraedricheskikh chisel 8-go poryadka. // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2016. № 1. [Elektronnyy resurs] – Rezhim dostupa: http://ntk.kubstu.ru/file/776.

4. Timofeev A.F. Integrirovanie funktsiy. M.-L.: OGIZ GITTL, 1948. – 433 c.

5. Smolyanskiy M.L. Tablitsy neopredelennykh integralov. – M.: GIFML, 1961. – 108 s.

6. Dvayt G.B. Tablitsy integralov i drugie matematicheskie formuly. Perevod s angliyskogo N.V. Levi. – M. Nauka, gl. red. fiz. – mat. lit., 1983. – 176 s.

7. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integraly i ryady. – M. Nauka, Ul. red. fiz. – mat. lit., 1981. – 800 s.

8. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tablitsy integralov, ryadov i proizvedeniy. 7-e izd. Perevod s angliyskogo V.V. Maksimova. – SPb.: BKhV-Peterburg, 2011.-1232 s.

ON THE SUMMATION OF THE INFINITE SERIES OF THE GENERALIZED TETRAHEDRAL NUMBERS' RECIPROCALS OF THE EVEN ORDER

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

The infinite series of the generalized tetrahedral numbers' reciprocals of an even order is considered. A direct method of calculating the definite integral, whose value is equal to the sum of this series, is proposed, which is based on the partial fraction expansion of the integrand rational function. The coefficients of this expansion are found. It is shown that the sum of the series is expressed in closed form in terms of elementary functions. Detailed calculation of the sum of the infinite series for the even orders 2, 4, 6, 8 and 10 are presented.

Key words: infinite series, infinite series of the generalized tetrahedral numbers' reciprocals of the *k*-th order, infinite series of the generalized pentatopic numbers' reciprocals of the even order, sum of an infinite series, rational function, tetrahedral numbers.