УДК 529.5+511.41

НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ И КАЛЕНДАРНЫЕ СИСТЕМЫ

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2,
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Читайте Эйлера, читайте Эйлера. Это наш общий учитель.
Пьер-Симон Лаплас

Представлены необходимые сведения о календаре из астрономии. Рассмотрены различные известные календарные системы: юлианский календарь, календарь Джалали, григорианский календарь, календарь Медлера, новоюлианский календарь. Показано, согласно Эйлеру, что, разложив длину тропического года в непрерывную дробь, можно по её подходящим дробям получить любой из известных календарей, в том числе и новоюлианский календарь. Предложен новогригорианский календарь, более удобный и точный, чем григорианский и календарь Джалали. Представлен сверхкалендарь, самый точный календарь на сегодняшний день.
Ключевые слова: календарь, календарная система, юлианский календарь, григорианский календарь, календарь Джалали, календарь Медлера, новоюлианский календарь, новогригорианский календарь, сверхкалендарь, Омар Хайям, Эйлер, Миланкович, непрерывная дробь.

1. Необходимые сведения о календаре из астрономии. Календарной системой или просто календарём называется система счёта длинных промежутков времени [1]. Наблюдая за сменой дня и ночи, сменой фаз Луны и сменой времен года, люди уже в глубокой древности пришли к таким понятиям как сутки, месяц и год.

Сутки (средние солнечные сутки) - слишком короткая мера времени, поэтому пришлось обратиться к месяцу (лунному или синодическому месяцу) и к году (солнечному или тропическому году), который определяется как промежуток времени между двумя последовательными прохождениями точки весеннего равноденствия видимым центром диска Солнца.

Так как продолжительность суток, месяца и года определяется разными периодическими процессами, то они несоизмеримы. Последнее означает, что в месяце и в году число суток не может быть выражено никакой конечной или периодической дробью [1].

По современным представлениям, продолжительность солнечных суток равна 86400 секундам, увеличиваясь на 0,015 секунды за тысячу лет [1].

Тропический год составлял на 1 января 1900 года 365 дней 5 часов 48 минут 45,98 секунд или 365,2421988 суток, а на 1 января 2000 года - 365 дней 5 часов 48 минут 45,19 секунд или 365,2421897 суток. Получается, что его длина убывает на 0,79 секунды за столетие. По другим данным она уменьшается от 0,53 секунды [3] до 1,12 секунды за столетие [1]. Из-за этой неопределённости календарь может быть надёжно рассчитан только на ближайшие сто тысяч лет с ошибкой в изменении длины года менее 20 минут или только на ближайшие миллион лет с ошибкой в изменении длины года менее 3 часов.

2. Юлианский календарь (старый стиль). Ведя наблюдения за Сириусом в течение 1460 лет, древнеегипетские жрецы обнаружили, что каждые четыре года восход Сириуса опаздывал на сутки. Через 4·365=1460 лет цикл начинался вновь. Следовательно, год составляет 365,25 суток.

Юлий Цезарь по совету александрийского астронома Созигена с 1 января 45 года до н. э. ввёл новый календарь, названный юлианским. В этом календаре каждый четвёртый год, называемый високосным, был на 1 сутки длиннее, чем простой год из 365 суток. Длина юлианского года составляет 365,25 суток, то есть больше истиной (здесь и далее под истиной длиной года понимается длина тропического года на 1 января 1900 года и равная 365,242199 суткам.) на 11 минут 14 секунд. Из-за этого каждые 128 лет накапливаются лишние сутки [1].

3. Календарь Джалали. В 1074 году в правление султана Джалала ад-Дина Малик-шаха была создана комиссия для разработки нового календаря. Руководил ею выдающийся персидский математик и астроном Омар Хайям (1048–1131).

Главной задачей комиссии было добиться совпадения начала года с весенним равноденствием и закрепить за каждым мусульманским праздником один и тот же календарный день. Такой календарь был предложен Омаром Хайямом в 1079 году и действовал в Иране с конца XI века до середины XIX века. По имени султана его стали называть календарём Джалали.

Омар Хайям исходил из длины года в $365^{8}/_{33}$ дней или 365,242424 суток, что всего лишь на 19,45 секунды больше истинного года. Такая незначительная разница приводит к тому, что в календаре Джалали лишние сутки накапливаются за 4444 года.

Поскольку длина года была оценена в $365^{8}/_{33}$ дней, то на каждые 33 года приходится 8 високосных лет. Период в 33 года был разбит на 8 циклов: первые 7 циклов имели длину по 4 года, 8-й – 5 лет. Последний год в каждом цикле считался високосным.

4. Григорианский календарь (новый стиль). Следующую реформу календаря в Европе предпринял Папа Римский Григорий XIII в 1582 г., когда расхождение между истинным и юлианским годом составило 10 дней. Он осуществил проект, предложенный итальянским врачом и математиком Луиджи Лилио. Этот календарь стали называть григорианским или новым стилем. Летоисчисление по юлианскому календарю получило название старого стиля.

Перед реформаторами стояли две задачи: первая – закрепить за моментом весеннего равноденствия календарную дату – 21 марта, и вторая – установить способ и правила по которому весеннее равноденствие с этой даты больше бы не сдвигалось.

Для решения этих задач 24 февраля 1582 году папа издаёт свою знаменитую буллу, согласно которой счёт дней передвигался на 10 суток вперёд. День после четверга 4 октября 1582 года следовало считать пятницей 15 октября.

Чтобы весеннее равноденствие с даты 21 марта больше не сдвигалось, была использована, определённая с хорошей точностью, длина тропического года из Альфонсинских таблиц, созданных между 1252 и 1270 годами, и определённая как [2]

365 дней 5 часов 49 минут и 16 секунд или 365,242546 суток.

Поскольку:

$$365,242546 = 365 + 0,25 - 0,0075 + 0,000046 =$$

$$= 365 + \frac{1}{4} - \frac{3}{400} + \frac{23}{500000} \approx 365 + \frac{97}{400},$$

то на протяжении 400 лет должно быть 97 високосных лет, а не 100 как юлианском календаре. В григорианском календаре сохранили чередование простых и високосных лет, но его дополнили правилом: если номер года оканчивается двумя нулями, а число сотен не делится на 4, то этот год — простой. Например, если взять промежуток в 400 лет, с 1601 года по 2000 год, то годы 1700, 1800, 1900-й — простые, а год 2000-й — високосный. По григорианскому календарю длина года составляет

$$365\frac{97}{400} = 365,2425 \text{ суток или 365 суток 5 часов 49 минут 12 секунд,}$$

что на 26,02 секунды больше истинной. В григорианском календаре ошибка в 1 сутки набежит за 3322 года.

5. Календарь Медлера. В 1864 г. профессор Дерптского университета (ныне Тартуский) немецкий астроном Иоганн Генрих Медлер (1794-1874) предложил в труде «О реформе календаря» новый календарь, основанный на дроби 1 год = $365^{31}/_{128}$ суток = 365,2421875 суток. В нём пришлось бы каждые 128 лет пропускать один високосный год, если високосные годы отсчитывать по принятой тогда юлианской системе. Это означало бы, что в периоде из 128 лет было бы не 32 високосных года как в юлианском календаре, а только 31. В таком календаре длина тропического года всего на 0,0000115 суток или 0,99 секунды меньше истинной (на 1 января 1900 года)! Лишние сутки в нём набежали бы за 86 956 лет.

Однако ни российское правительство, ни правительства других стран не проявили интереса к проекту сверхточного календаря.

6 Новоюлианский календарь (календарь Миланковича). В мае 1923 г. в Константинополе состоялся собор православных восточных церквей, на котором было предложено ввести так называемый новоюлианский календарь.

Новоюлианский календарь был разработан Милутином Миланковичем (1879 – 1958), знаменитым сербским астрономом, математиком и геофизиком.

Он отличается от григорианского календаря тем, что в нем отбрасывается не 3 суток за 400 лет, а 7 суток за 900 лет. При этом високосными считаются те вековые годы, у которых число сотен при делении на 9 дает в остатке 2 или 6. Это годы: 2000, 2400, 2900, 3300, 3800 и т.д. Григорианский и новоюлианский календари полностью совпадают до 2800 года.

По новоюлианскому календарю длина года составляет

$$365+\frac{1}{4}-\frac{7}{900}=365\frac{218}{900}=365{,}242222 \text{ суток,}$$

что длиннее продолжительности тропического года (на 1 января 1900 года) на 1,99 секунды. В новоюлианском календаре расхождение в одни сутки случится за 43 478 лет!

Увы, решение Константинопольского собора не было воплощено в жизнь.

7. Расчёт календаря по Эйлеру с использованием непрерывных дробей. Леонард Эйлер, по-видимому, был одним из первых, кто рассмотрел проблему календаря с применением непрерывных дробей [4]. Следуя Эйлеру, выразим длину года в сутках и представим эту величину в виде непрерывной дроби:

Продолжительность тропического года в сутках на 1.01.1900

$$365{,}\ 242199=365+\frac{1}{4+}\,\frac{1}{7+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{20+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{12}$$

Последовательность подходящих дробей для неё такова:

$$365;\ \ 365\frac{1}{4};\ \ 365\frac{7}{29};\ \ 365\frac{8}{33};\ \ 365\frac{31}{128};\ \ 365\frac{163}{673};\ \ 365\frac{3291}{13588};\ \ 365\frac{19909}{82201};$$

$$365\frac{242199}{1000000}.$$

Возьмём $365^1/_4$. Теперь за 4 года набегает 1 «лишний» день. Разобьём годы на четырёхлетние циклы. В каждом цикле первые три года по 365 дней, в четвертом, високосном, 366 дней. Мы получили юлианский календарь.

Возьмём $365^7/_{29}$. Теперь за 29 лет набегает 7 «лишних» дней. Период в 29 лет разбиваем на 7 циклов: первые 6 циклов по 4 года и 7-й – 5 лет. Последний год в каждом цикле будет високосным. Такой календарь никем не использовался. Средняя продолжительность года в таком календаре всего на 1 минуту и 11 секунд меньше истинного года. Лишние сутки в таком календаре набегут за 1217 лет.

Возьмём $365^{8}/_{33}$. В этом случае за 33 года набегает 8 «лишних» дней. Этот календарь, предложенный в 1079 г. Омром Хайямом, был рассмотрен выше.

А если выбрать подходящую дробь $365^{31}/_{128}$, то получим, что за 128 лет набежит 31 «лишний день». Этот календарь, предложенный в 1864 г. Иоганном Медлером, был так же рассмотрен выше.

Следуя Эйлеру, из разложения длительности тропического года в непрерывную дробь, можно обосновать и григорианский календарь. Действительно, если продолжительность тропического года лежит между $365\frac{31}{128}$ и $365\frac{163}{673}$ сутками, то за 400 лет должно набежать x високосных лет. Тогда

$$\frac{x}{400}=\frac{31}{128} \text{ или } x=\frac{775}{8}=96\frac{7}{8}=96{,}875\approx 97 \text{ високосным годам.}$$

Мы получаем григорианский календарь. Аналогичным образом, можно получить новоюлианский календарь. Пусть продолжительность тропического года лежит между $365\frac{163}{673}$ и $365\frac{3291}{13588}$ сутками, тогда за 900 лет должно набежать y високосных лет. Поэтому

$$\frac{y}{900}=\frac{163}{673} \text{ или } y=\frac{900\cdot 163}{673}\approx 217{,}98\approx 218 \text{ високосным годам.}$$

Теперь мы получаем новоюлианский календарь. Наконец, выясним, мог ли сам Эйлер [4] получить все перечисленные выше календари из известной ему длины тропического года:

365 дней 5 часов 48 минут 55 секунд $= 365\frac{4187}{17280}$ дней.

Там же [4] он разлагает длину года в непрерывную дробь:

$$365\frac{4187}{17280}=365+\frac{1}{4+}\frac{1}{7+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2},$$

и приводит её подходящие дроби (правда, только первые семь):

$$365;\quad 365\frac{1}{4};\quad 365\frac{7}{29};\quad 365\frac{8}{33};\quad 365\frac{55}{227};\quad 365\frac{63}{260};\quad 365\frac{181}{747};\quad 365\frac{425}{1754};$$

$$365\frac{1881}{7763};\ 365\frac{4187}{17280}.$$

Он прямо указывает [4, с. 286], что «… часы с минутами и секундами сверх 365 дней, составляют около одного дня за четыре года; отсюда следует юлианский календарь. Точнее же за 33 года получается 8 дней или за 747 лет 181 день; отсюда следует, что за 400 лет излишек составляет 97 день. Поэтому, в то время, как за этот промежуток юлианский календарь вставляет 100 дней, грегорианский каждые 4 столетия 3 високосных года обращает в простые.» Отсюда становится понятным, что Эйлер не подозревал о существовании календарей Медлера и Миланковича, но он указал на календарь Омара Хайяма, соответствующий подходящей дроби $365\,{}^{8}\!/_{33}$.

8. Новогригорианский календарь. Можно поднять точность григорианского календаря, рассмотрев период не в 400 лет, а в 500 лет. Действительно, пусть продолжительность тропического года лежит между $365\frac{31}{128}$ и $365\frac{163}{673}$ сутками, тогда за 500 лет должно набежать t високосных лет. Поэтому

$$\frac{t}{500}=\frac{31}{128}\ \text{или}\ t=\frac{500\cdot 31}{128}=121\frac{12}{128}\approx 121{,}09\approx 121\ \text{високосному году.}$$

Следовательно, мы получаем календарь, назовем его новогригорианским, в котором за период 500 лет приходится не 125 високосных, как в юлианском календаре, а всего 121 високосный год.

Правила выбора високосного года в новогригорианском календаре просты: год високосный, если или год не вековой и делится на 4, или год вековой и делится на 500. Например, годы 1996 и 2000 – високосные, годы 1997 и 2100 не високосные. Продолжительность тропического года в этом календаре равна

$$365\frac{121}{500}=365,242000 \text{ суток,}$$

что на 0,000199 суток короче продолжительности тропического года на 1 января 1900 года. Новогригорианский календарь отстанет на одни сутки за 5025 лет. Он немного точнее календаря Омара Хайяма и в полтора раза точнее григорианского календаря.

9. Сверхкалендарь. Можно повысить точность новогригорианского календаря в 200 раз, если период 500 лет заменить 5000-и летним периодом. Считая, что продолжительность тропического года лежит между $365\frac{163}{673}$ и $365\frac{3291}{13588}$ сутками, за 5000 лет должно набежать u високосных лет. Поэтому

$$\frac{u}{5000}=\frac{163}{673} \text{ или } u=\frac{5000\cdot 163}{673}\approx 1210,996\approx 1211 \text{ високосных лет.}$$

Этот календарь назовем сверхкалендарём. В нём за период 5000 лет приходится не 1250 високосных лет, как в юлианском календаре, а 1211 високосных лет.

Правила выбора високосного года в сверхкалендаре просты: год високосный, если или год не вековой и не тысячелетний и делится на 4, или год вековой, но не тысячелетний и делится на 500, или год тысячелетний и делится на 5000. Например, годы 1996, 2500 и 5000 – високосные, годы 1997, 2100 и 3000 не високосные.

В сверхкалендаре продолжительность тропического года равна

$$365\frac{1211}{5000}=365,242200 \text{ суток,}$$

что на 0,000001 суток или 0,086 секунды длиннее продолжительности тропического года на 1 января 1900 года. Лишние сутки набегут в нём за один миллион лет. Этот календарь превосходит на порядок точность календаря Медлера.

10. Заключение. Показано по Эйлеру [4], что, разложив длину тропического года в непрерывную дробь, можно по её подходящим дробям получить любой из известных календарей, в том числе и новоюлианский календарь. Предложен новогригорианский календарь, более удобный и точный, чем григорианский и календарь Джалали. Представлен сверхкалендарь, самый точный на сегодняшний день.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кононович Э.Г. Общий курс астрономии: учебное пособие / Э.Г. Кононович, В.И. Мороз, под ред. В.В. Иванова. – 2-е изд., испр. – М. : Эдиториал УРСС, 2004. – 544 с.

2. Borkowski, K.M. The tropical year and the solar calendar / K.M. Borkowski // Journal of the Royal Astronomical Society of Canada. 1991. 85(3), P. 121–130.

3. Swerdlow N.M. The length of the year in the original proposal for the Gregorian calendar / N.M. Swerdlow // J. Hist. Astron. 1986. XVII, P. 109.

4. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. В 2 т. Т.1. / Л. Эйлер. – 2-е изд. – М. : ГИФМЛ, 1961. – 315 с.

REFERENCES

1. Kononovich E.G. Obshchiy kurs astronomii: uchebnoe posobie / E.G. Kononovich, V.I. Moroz, pod red. V.V. Ivanova. – 2-e izd., ispr. – M. : Editorial URSS, 2004. – 544 s.

2. Borkowski, K.M. The tropical year and the solar calendar / K.M. Borkowski // Journal of the Royal Astronomical Society of Canada. 1991. 85(3), P. 121–130.

3. Swerdlow N.M. The length of the year in the original proposal for the Gregorian calendar / N.M. Swerdlow // J. Hist. Astron. 1986. XVII, P. 109.

4. Eyler L. Vvedenie v analiz beskonechnykh. V 2 t. T.1. / L. Eyler. – 2-e izd. – M. : GIFML, 1961. – 315 s.

CONTINUED FRACTIONS AND CALENDAR SYSTEMS

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072,
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

The necessary information from astronomy about a calendar is presented. Various known calendar systems is considered: the Julian calendar, the Jalali calendar, the Gregorian calendar, the Madler calendar, the revised Julian Calendar of Milankovitch. It is shown, according to Euler, that by expanding the length of the tropical year in a continued fraction, it is possible for its suitable fractions to get any known calendars, including the Revised Julian Calendar . The Revised Gregorian calendar is presented, more convenient and accurate than the Gregorian calendar, and the Jalali calendar. Super calendar is presented; it is the most accurate calendar up to date.
Key words: Calendar, calendar system, Julian calendar, Gregorian calendar, Jalali calendar, Madler calendar, Revised Julian calendar, Revised Gregorian calendar, super calendar, Omar Khayyam, Euler, Milanković, continued fraction.