УДК 517.521

О СУММИРОВАНИИ РЯДА ОБРАТНЫХ ОБОБЩЁННЫХ ПЕНТАТОПИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ 8-ГО ПОРЯДКА

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2,
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Рассмотрен ряд обратных обобщённых пентатопических чисел 8-го порядка. Предложен прямой метод вычисления определённого интеграла, величина которого равна сумме этого ряда, основанный на разложении рациональной функции на простейшие рациональные дроби. Для вычисления некоторых коэффициентов этого разложения применялись нестандартные методы. Показано, что сумма ряда выражается через значения элементарных функций в замкнутой форме.

Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, рациональная функция, ряд обратных пентатопических чисел, пентатопические числа.

1. Сумма обратных обобщённых пентатопических чисел *k*-го порядка. В предыдущей нашей публикации [1] было введено определение *обобщённого пентатопического числа* P_n

$$P_n^k = \frac{(kn+1)(kn+2)(kn+3)(kn+4)}{4!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad k = 1, 2, 3, \ldots \,.$$

В дальнейшем мы будем опускать множитель $\dfrac{1}{4!}$ при рассмотрении чисел, обратных к обобщённым пентатопическим числам.

В этой же нашей статье [1] была найдена сумма ряда обратных обобщённых пентатопических чисел k порядка через интеграл

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(kn+1)(kn+2)(kn+3)(kn+4)} = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(1-x)^3}{1-x^k}\,dx, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1}$$

который был нами вычислен для значений $k = 1, 2, 3, 4$. В двух других наших статьях [2,3] была вычислена сумма ряда обратных обобщённых тетраэдрических чисел 5-го и 6-го порядка соответственно.

2. Сумма ряда обратных обобщённых пентатопических чисел 8-го порядка. Вычислим сумму ряда (1) в случае $k = 8$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(8n+1)(8n+2)(8n+3)(8n+4)}=\frac{1}{6}\int_0^1\frac{(1-x)^3}{1-x^8}dx=\frac{1}{6}\int_0^1\frac{(1-x)^2\,dx}{1+x+...+x^6+x^7}. \quad (2)$$

Для вычисления интеграла в формуле (2) разложим на множители многочлен, стоящий в знаменателе

$$x^7+x^6+...+x+1=x^4\left(x^3+x^2+x+1\right)+\left(x^3+x^2+x+1\right)=$$

$$=\left(x^4+1\right)\left(x^3+x^2+x+1\right)=\left(x^4+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x+1\right). \quad (3)$$

Разложим теперь подынтегральную функцию в формуле (2) на простейшие дроби, используя разложение (3)

$$\frac{1-2x+x^2}{\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^4+1}. \quad (4)$$

Умножая левую и правую части равенства (4) на двучлен $x+1$ и переходя в этом равенстве к пределу при $x\to -1$, получим

$$\lim_{x\to -1}\frac{1-2x+x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)}=\lim_{x\to -1}\left(A+(x+1)\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+(x+1)\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^4+1}\right)$$

или

$$\lim_{x\to -1}\frac{1-2x+x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)}=A.$$

Отсюда

$$A=1. \quad (5)$$

Подставив это значение в равенство (4) получим

$$\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^4+1}=\frac{1-2x+x^2}{\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)}-\frac{1}{x+1}=$$

$$=-\frac{x(2+x^3+x^5)}{(1+x)(x^2+1)(x^4+1)}=-\frac{x(1+x)(2-2x+2x^2-x^3+x^4)}{(1+x)(x^2+1)(x^4+1)}=$$

$$=-\frac{x(2-2x+2x^2-x^3+x^4)}{(x^2+1)(x^4+1)}. \quad (6)$$

Умножая правую и левую части равенства (6) на двучлен x^2+1, получим

$$Bx+C+(ax^3+bx^2+cx+d)\frac{(x^2+1)}{x^4+1}=-\frac{x(2-2x+2x^2-x^3+x^4)}{x^4+1}.$$

Положив в этом равенстве $x=i$, получим

$$Bi+C=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i.$$

Отсюда следует, что

$$B=-\frac{1}{2},\quad C=-\frac{1}{2}. \qquad (7)$$

Подставив эти значения в равенство (6) получим

$$\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^4+1}=\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1}-\frac{x(2-2x+2x^2-x^3+x^4)}{(x^2+1)(x^4+1)}=$$

$$=-\frac{x^5-3x^4+4x^3-4x^2+3x-1}{2(x^2+1)(x^4+1)}=-\frac{x(x^4+4x^2+3)-(3x^4+4x^2+1)}{2(x^2+1)(x^4+1)}=$$

$$=-\frac{x(x^2+1)(x^2+3)-(3x^2+1)(x^2+1)}{2(x^2+1)(x^4+1)}=-\frac{x^3-3x^2+3x-1}{2(x^4+1)}. \qquad (8)$$

Следовательно,

$$a=-\frac{1}{2},\quad b=\frac{3}{2},\quad c=-\frac{3}{2},\quad d=\frac{1}{2}. \qquad (9)$$

Подставив найденные коэффициенты из формул (5), (7) и (9) в формулу (4), приходим к разложению

$$\frac{1-2x+x^2}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1}-\frac{x^3-3x^2+3x-1}{2(x^4+1)}. \qquad (10)$$

Зная, что

$$x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

разложим на простейшие рациональные дроби последнюю рациональную дробь в формуле (10)

$$\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}. \qquad (11)$$

После приведения к общему знаменателю, приравнивая числители, приходим к равенству

$$x^3-3x^2+3x-1=(Ax+B)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

Полагая в этом равенстве последовательно $x=0$, $x=i$, $x=1$, получим следующую систему линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов

$$\begin{cases} B+D=-1, \\ D-B=\sqrt{2}, \\ A-C=\sqrt{2}, \\ (A+B)(\sqrt{2}-1)+(C+D)(\sqrt{2}+1)=0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим значения неизвестных коэффициентов

$$A=\frac{\sqrt{2}+1}{2},\quad B=-\frac{\sqrt{2}+1}{2},\quad C=-\frac{\sqrt{2}-1}{2},\quad D=\frac{\sqrt{2}-1}{2}. \qquad (12)$$

Подставим их в разложение (11)

$$\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^4+1}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\frac{x-1}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\frac{x-1}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Используя последнюю формулу, мы можем записать разложение (10)

$$\frac{x^2-2x+1}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1}-\frac{\frac{\sqrt{2}+1}{4}(x-1)}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{4}(x-1)}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Вычислим теперь интеграл в правой части формулы (2)

$$\int_0^1\frac{(1-x)^2dx}{x^7+x^6+...+1}=\int_0^1\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x+1}{x^2+1}dx-$$

$$-\frac{\sqrt{2}+1}{4}\int_0^1\frac{x-1}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\frac{\sqrt{2}-1}{4}\int_0^1\frac{x-1}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx=$$

$$=\frac{3\ln 2}{4}-\frac{\pi}{8}-\frac{\sqrt{2}+1}{4}\int_0^1\frac{x-1}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\frac{\sqrt{2}-1}{4}\int_0^1\frac{x-1}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx. \qquad (13)$$

Пусть $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Имеем:

$$\int_0^1\frac{x-1}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx=\int_0^1\frac{x-1}{x^2+2x\cos\varphi+1}dx=\int_0^1\frac{x+\cos\varphi}{(x+\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}dx-$$

$$-\int_0^1 \frac{1+\cos\varphi}{(x+\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}dx = \frac{1}{2}\ln(2+2\cos\varphi) - \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \ln\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\left(\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}\varphi)\right) =$$

$$= \ln\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \ln\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}. \quad (14)$$

Аналогично получим:

$$\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx = \int_0^1 \frac{x-1}{x^2+2x\cos 3\varphi+1}dx = \int_0^1 \frac{x+\cos 3\varphi}{(x+\cos 3\varphi)^2+\sin^2 3\varphi}dx -$$

$$-\int_0^1 \frac{1+\cos 3\varphi}{(x+\cos 3\varphi)^2+\sin^2 3\varphi}dx = \frac{\ln(2+2\cos 3\varphi)}{2} - \frac{1+\cos 3\varphi}{\sin 3\varphi}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\cos 3\varphi}{\sin 3\varphi}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \ln\left(2\cos\frac{3\varphi}{2}\right) - \operatorname{ctg}\frac{3\varphi}{2}\left(\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\varphi}{2}\right) - \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}3\varphi)\right) =$$

$$= \ln\left(2\cos\frac{3\varphi}{2}\right) - \operatorname{ctg}\frac{3\varphi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} + 3\varphi\right) = \ln\left(2\cos\frac{3\varphi}{2}\right) - \frac{3\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{3\varphi}{2}. \quad (15)$$

Подставляя интегралы (14) и (15) в формулу (13), находим интеграл из (2)

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^2 dx}{x^7+x^6+...+1} = \frac{3\ln 2}{4} - \frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}+1}{4}\left(\ln\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right) +$$

$$+\frac{\sqrt{2}-1}{4}\left(2\ln\left(\cos\frac{3\varphi}{2}\right) - \frac{3\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{3\varphi}{2}\right). \quad (16)$$

Подставляя значение $\varphi = \frac{\pi}{4}$ в формулу (16), получим

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^2 dx}{x^7+x^6+...+1} = \frac{3\ln 2}{4} - \frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}+1}{4}\left(\ln\left(2\cos\frac{\pi}{8}\right) - \frac{\pi}{8}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}\right) +$$

$$+\frac{\sqrt{2}-1}{4}\left(\ln\left(2\cos\frac{3\pi}{8}\right) - \frac{3\pi}{8}\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{3\ln 2}{4} - \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\ln\frac{\cos\frac{3\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}\right) -$$

$$-\frac{\ln\left(4\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\right)}{4}+\frac{\pi}{32}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}-3\left(\sqrt{2}-1\right)\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}\right)=$$

$$=\frac{5\ln 2}{8}+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)+\frac{\pi\left(4\sqrt{2}-5\right)}{16}.$$

Итак, сумма ряда обратных обобщённых пентатопических чисел 8-го порядка равна

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(8n+1)(8n+2)(8n+3)(8n+4)}=\frac{5\ln 2}{48}+\frac{\sqrt{2}}{24}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)+\frac{\pi\left(4\sqrt{2}-5\right)}{96}. \quad (17)$$

Заключение. Рассмотрен ряд обратных обобщённых пентатопических чисел 8-го порядка. Вычислена его сумма в замкнутой форме (см. формулу (17)). Сумма этого ряда отсутствует в известных математических справочниках [4-6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Терещенко И.В. О суммировании ряда обратных обобщенных пентатопических чисел *k*-го порядка. // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 13. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://ntk.kubstu.ru/file/737.

2. Терещенко И.В. О суммировании ряда обратных обобщенных пентатопических чисел 5-го порядка. // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2016. № 1. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://ntk.kubstu.ru/file/792.

3. Терещенко И.В. О суммировании ряда обратных обобщенных пентатопических чисел 6-го порядка. // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2016. № 1. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://ntk.kubstu.ru/file/793.

4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 800 с.

5. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Перевод с английского Н.В. Леви.-М. Наука, гл. ред. физ. мат. лит., 1983. 176 с.

6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, рядов и произведений. 7-е изд. Перевод с английского В.В. Максимова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 1232 с.

REFERENCES

1. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada obratnykh obobshchennykh pentatopicheskikh chisel k-go poryadka. // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 13. [Elektronnyy resurs] – Rezhim dostupa: http://ntk.kubstu.ru/file/737.

2. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada obratnykh obobshchennykh pentatopicheskikh chisel 5-go poryadka. // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2016. № 1. [Elektronnyy resurs] – Rezhim dostupa: http://ntk.kubstu.ru/file/792.

3. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada obratnykh obobshchennykh pentatopicheskikh chisel 6-go poryadka. // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2016. № 1. [Elektronnyy resurs] – Rezhim dostupa: http://ntk.kubstu.ru/file/793.

4. Prudnikov A.P., Brychkov Ju.A., Marichev O.I. Integraly i rjady. – M.: Nauka, Gl. red. fiz.-mat. lit., 1981. – 800 s.

5. Dvajt G.B. Tablicy integralov i drugie matematicheskie formuly. Perevod s anglijskogo N.V. Levi. – M. Nauka, gl. red. fiz. – mat. lit., 1983. – 176 s.

6. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series, and Products. 7-th ed., Elsevier Inc., 2007.

ON THE SUMMATION OF THE INFINITE SERIES OF THE GENERALIZED PENTATOPIC NUMBERS' RECIPROCALS OF THE 8-TH ORDER

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072,
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

The infinite series of the generalized pentatopic numbers’ reciprocals of the 8-th order is considered. A direct method of calculating the definite integral, whose value is equal to the sum of this series, was proposed, which is based on the partial fraction decomposition of a rational function.. The non-standard methods were used to calculate some of the coefficients of this expansion. It is shown that the sum of the series is expressed by the values of elementary functions in closed form.

Key words: infinite series, rational functions, infinite series of the reciprocals of the pentatopic numbers, pentatopic numbers.