УДК 517.521+511.14

ОБ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ ЧИСЛА, РАВНОГО СУММЕ НЕКОТОРОГО БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛОВОГО РЯДА, ПО МОТИВАМ ЗАДАЧИ №25 ИЗВЕСТНОГО ЗАДАЧНИКА В.А. КРЕЧМАРА

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Рассмотрен сходящийся бесконечный ряд, для которого ряды из задачи №25 известного задачника В.А. Кречмара являются частными случаями. Методом Фурье доказано, что сумма ω этого ряда является иррациональным числом. Из доказанного утверждения следует, что число ω будет иррациональным в трёх важных случаях: степенном, факториальном и показательном. Ряды для последнего случая в задаче №25 отсутствуют.

Ключевые слова: иррациональное число, сходящийся бесконечный ряд, метод Фурье, задачник В.А. Кречмара.

1. Введение. Иррациональным числом называется вещественное число, которое не является рациональным, то есть которое не может быть представлено в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m - целое число, n - натуральное число.

В знаменитом задачнике В.А. Кречмара на странице 95 приведена следующая задача под номером 25 [1]:

*«**№ 25.** Доказать, что числа, определённые следующими рядами, суть числа иррациональные»:*

$$1^\circ \ \omega = \frac{1}{l} + \frac{1}{l^4} + \frac{1}{l^9} + \frac{1}{l^{16}} + \ldots + \frac{1}{l^{n^2}} + \ldots,$$

где l – любое целое положительное число.

$$2^\circ \ \omega = \frac{1}{l} + \frac{1}{l^{1\cdot 2}} + \frac{1}{l^{1\cdot 2\cdot 3}} + \frac{1}{l^{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}} + \ldots + \frac{1}{l^{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}} + \ldots,$$

где l – любое целое положительное число.

Отметим одну неточность в условии задачи – если $l=1$, то оба ряда расходятся. Таким образом, $l \geq 2$. Тогда $l^{n^2} \geq l^n$ и $l^{n!} \geq l^n$ для любого натурального n.

Следовательно, оба этих положительных ряда будут сходиться, так каждый из них мажорируются сходящейся геометрической прогрессией $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l^n}$.

Заметим, что оба ряда являются частными случаями следующего ряда

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l^{k_n}} = \frac{1}{l^{k_1}} + \frac{1}{l^{k_2}} + \frac{1}{l^{k_3}} + \ldots + \frac{1}{l^{k_n}} + \ldots, \tag{1}$$

где

$l = 2, 3, 4, \ldots$, то есть натуральное число большее 1;

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ - монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$, удовлетворяющая условию роста

$$k_{n+2} - k_{n+1} > k_{n+1} - k_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{2}$$

Ряд (1) сходится, так как $k_n \geq n$. Поэтому $\frac{1}{l^{k_n}} \leq \frac{1}{l^n}$. Следовательно, ряд (1) мажорируется сходящейся геометрической прогрессией $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l^n}$.

2. Доказательство иррациональности числа ω, заданного рядом (1). Докажем следующее утверждение.

Теорема. Действительное число $\omega > 0$, заданное сходящимся рядом (1), где натуральное число $l \geq 2$, $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ - монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$, удовлетворяющая условию роста (2), является иррациональным действительным числом.

Докажем иррациональность числа $\omega > 0$ методом от противного. Предположим обратное. Пусть число $\omega > 0$ рационально и равно несократимой рациональной дроби $\omega = \dfrac{p}{q}$. Тогда, умножая равенство (1) на целое положительное число $l^{k_n} q$

$$pl^{k_n} = ql^{k_n}\left(\frac{1}{l^{k_1}} + \frac{1}{l^{k_2}} + \frac{1}{l^{k_3}} + \ldots + \frac{1}{l^{k_n}}\right) + ql^{k_n}\left(\frac{1}{l^{k_{n+1}}} + \frac{1}{l^{k_{n+2}}} + \frac{1}{l^{k_{n+3}}} + \ldots\right),$$

приходим к разности

$$pl^{k_n} - q\left(l^{k_n-k_1} + l^{k_n-k_2} + l^{k_n-k_3} + \ldots + l^{k_n-k_{n-1}} + 1\right) = q\left(\frac{1}{l^{k_{n+1}-k_n}} + \frac{1}{l^{k_{n+2}-k_n}} + \frac{1}{l^{k_{n+3}-k_n}} + \ldots\right).$$

В силу того, что правая часть этого равенства положительна, разность в левой части так же положительна. Так как это разность целых чисел, она не может быть меньше единицы. Следовательно

$$q\left(\frac{1}{l^{k_{n+1}-k_n}} + \frac{1}{l^{k_{n+2}-k_n}} + \frac{1}{l^{k_{n+3}-k_n}} + \ldots\right) \geq 1 \qquad (3)$$

Заметим, что для значений $m = 1, 2, 3, \ldots$ справедлива цепочка неравенств

$$k_{n+m} - k_n > (k_{n+m} - k_{n+m-1}) + (k_{n+m-1} - k_{n+m-2}) + \ldots + (k_{n+1} - k_n) > m(k_{n+1} - k_n), \qquad (4)$$

из которой следует неравенство

$$1 \leq q\left(\frac{1}{l^{k_{n+1}-k_n}} + \frac{1}{l^{(k_{n+2}-k_n)}} + \ldots\right) \leq q\left(\frac{1}{l^{k_{n+1}-k_n}} + \frac{1}{l^{2(k_{n+1}-k_n)}} + \frac{1}{l^{3(k_{n+1}-k_n)}} + \ldots\right) = \frac{q}{l^{k_{n+1}-k_n} - 1}. \qquad (5)$$

Из условия теоремы можно получить ещё одну цепочку неравенств

$$k_2 - k_1 \geq 1, \quad k_3 - k_2 > k_2 - k_1 \geq 1 \Rightarrow k_3 - k_2 \geq 2, \quad k_4 - k_3 > k_3 - k_2 \geq 2 \Rightarrow k_4 - k_3 \geq 3, \ldots,$$

из которой следует, что $k_{n+1} - k_n \geq n$ и, поэтому, $\lim\limits_{n\to\infty}(k_{n+1} - k_n) = \infty$. Следовательно, выбрав n достаточно большим, получим, что $\dfrac{q}{l^{k_{n+1}-k_n} - 1} < 1$. В таком случае, мы приходим к противоречивому двойному неравенству

$$1 \leq q\left(\frac{1}{l^{k_{n+1}-k_n}} + \frac{1}{l^{(k_{n+2}-k_n)}} + \frac{1}{l^{(k_{n+3}-k_n)}} + \ldots\right) < 1.$$

Отсюда следует, что число $\omega > 0$, равное сумме ряда (1) не может быть рациональным.

С помощью доказанной теоремы легко решить задачу 25 из задачника. Действительно, если $k_n = n^2$ или $k_n = n!$, то все условия теоремы выполнены:

1) $k_{n+1} > k_n$ - условие монотонного возрастания;

2) $k_{n+1} - k_n > k_n - k_{n-1}$ - условие роста.

Заключение. Из доказанной теоремы следует, что число ω будет иррациональным для следующих последовательностей:

1) степенной $k_n = n^m, \quad m = 2, 3, 4, \dots;$

2) факториальной $k_n = \alpha_n \alpha_{n-1} \cdot \ldots \cdot \alpha_1, \quad 1 \le \alpha_1 < \ldots < \alpha_n < \ldots \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots \in N$, например $k_n = (2n)!!$ или $k_n = (2n-1)!!$

3) показательной $k_n = m^n, \quad m = 2, 3, 4, \dots;$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кречмар В.А. Задачник по алгебре. Изд. 4-е, стереот. – М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1961. – 428 с.

REFERENCES

1. Krechmar V.A. Zadachnik po algebre. Izd. 4-e, stereot. – M.: Gos. izd. fiz.-mat. literatury, 1961. – 428 s.

ABOUT THE IRRATIONAL NUMBER WHICH IS EQUAL TO THE SUM OF SOME INFINITE SERIES, MOTIVES OF THE PROBLEM №25 FROM FAMOUS KRETZSCHMAR'S PROBLEM BOOK

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072,
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

The convergent infinite series is considered, for which the series of the problem №25 from V.A. Krechmar's problem book are special cases. It is proved by the Fourier method that the sum ω of this series is an irrational number. From the proved statement implies that the number ω is rational in three important cases: a power law, a factorial low and exponential low. The series of the latter case in the problem №25 is absent.

Key words: irrational number, convergent infinite series, Fourier method, Kretzschmar's problem book.