УДК 517.521

О СУММИРОВАНИИ РЯДА ОБРАТНЫХ ОБОБЩЁННЫХ ПЕНТАТОПИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ 6-ГО ПОРЯДКА

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Рассмотрен ряд обратных обобщённых пентатопических чисел 6-го порядка. Предложен прямой метод вычисления определённого интеграла, величина которого равна сумме этого ряда. Показано, что сумма ряда выражается через квадратичные иррациональности.

Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, телескопический ряд, ряд обратных пентатопических чисел, пентатопические числа.

1. Сумма обратных обобщённых пентатопических чисел *k*-го порядка. В предыдущей нашей публикации [1] было введено определение *обобщённого тетраэдрического числа* или *обобщённого треугольного пирамидального числа* P_n

$$P_n^k = \frac{(kn+1)(kn+2)(kn+3)(kn+4)}{4!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

В дальнейшем мы будем опускать множитель $\frac{1}{4!}$ при рассмотрении чисел, обратных к обобщённым пентатопическим числам.

В этой же нашей статье [1] была найдена сумма ряда обратных обобщённых пентатопических чисел k порядка через интеграл

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(kn+1)(kn+2)(kn+3)(kn+4)} = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(1-x)^3}{1-x^k}\,dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \qquad (1)$$

который был нами вычислен для значений $k = 1, 2, 3, 4$. В другой нашей статье [2] была вычислена сумма ряда обратных обобщённых пентатопических чисел 5 порядка.

2. Сумма ряда обратных обобщённых пентатопических чисел 6-го порядка. Вычислим сумму ряда (1) в случае $k = 6$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(6n+1)(6n+2)(6n+3)(6n+4)}=\frac{1}{6}\int_0^1\frac{(1-x)^3}{1-x^6}dx=\frac{1}{6}\int_0^1\frac{(1-x)^2\,dx}{1+x+...+x^4+x^5}. \quad (2)$$

Для вычисления интеграла в формуле (2) разложим на множители многочлен, стоящий в знаменателе

$$x^5+x^4+...+x+1=x^3\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+x+1\right)=\left(x^3+1\right)\left(x^2+x+1\right)=$$

$$=\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right). \quad (3)$$

Разложим теперь подынтегральную функцию в формуле (2) на простейшие дроби, используя разложение (3)

$$\frac{1-2x+x^2}{\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+E}{x^2-x+1}. \quad (4)$$

Умножая левую и правую части равенства (4) на двучлен $x+1$ и переходя в этом равенстве к пределу при $x\to-1$, получим

$$\lim_{x\to-1}\frac{1-2x+x^2}{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to-1}\left(A+(x+1)\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+(x+1)\frac{Dx+E}{x^2-x+1}\right)$$

или

$$\lim_{x\to-1}\frac{1-2x+x^2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=A.$$

Отсюда

$$A=\frac{4}{3}. \quad (5)$$

Подставив это значение в равенство (4) получим

$$\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+E}{x^2-x+1}=\frac{1-2x+x^2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x+1)}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x+1}=$$

$$=-\frac{1+6x+x^2+4x^4}{3(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=-\frac{1+5x-4x^2+4x^3}{3(x^2+x+1)(x^2-x+1)}. \quad (6)$$

Умножая правую и левую части равенства (6) на произведение квадратных трёхчленов, получим

$$(Bx+C)(x^2-x+1)+(Dx+E)(x^2+x+1)=-\frac{1+5x-4x^2+4x^3}{3}.$$

Положив в этом равенстве последовательно $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ и $x = 2$, получим следующую систему линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов

$$C + E = -\frac{1}{3}, \quad B + C + 3D + 3E = -2,$$

$$-3B + 3C - D + E = 4, \quad 6B + 3C + 14D + 7E = -9.$$

Решим эту систему методом Гаусса, записав её в равносильном виде

$$\begin{cases} B + C + 3D + 3E = -2, \\ -B + C - \frac{1}{3}D + \frac{1}{3}E = \frac{4}{3}, \\ B + \frac{1}{2}C + \frac{7}{3}D + \frac{7}{6}E = -\frac{3}{2}, \\ C + \qquad E = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Исключая неизвестное B из второго и третьего уравнений, получим после очевидных преобразований, следующую равносильную систему

$$\begin{cases} B + C + 3D + 3E = -2, \\ C + \frac{4}{3}D + \frac{5}{3}E = -\frac{1}{3}, \\ C + \frac{4}{3}D + \frac{11}{3}E = -1, \\ C + \qquad E = -\frac{1}{3}, \end{cases}$$

Исключая теперь неизвестное C из третьего и четвёртого уравнений системы, получим

$$\begin{cases} B + C + 3D + 3E = -2, \\ C + \frac{4}{3}D + \frac{5}{3}E = -\frac{1}{3}, \\ D + \frac{1}{2}E = 0, \\ 2E = -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решая систему снизу вверх, получим значения неизвестных коэффициентов

$$E=-\frac{1}{3},\quad D=\frac{1}{6},\quad C=0,\quad B=-\frac{3}{2}. \tag{7}$$

Подставим их (см. формулы (5) и (7)) в разложение (4)

$$\frac{1-2x+x^2}{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}=\frac{4/3}{x+1}-\frac{3}{2}\frac{x}{x^2+x+1}+\frac{1}{6}\frac{x-2}{x^2-x+1}$$

и вычислим интеграл (2)

$$\int_0^1\frac{1-2x+x^2}{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}dx=\frac{4}{3}\int_0^1\frac{dx}{x+1}-\frac{3}{2}\int_0^1\frac{x}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{6}\int_0^1\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{4}{3}\ln 2-\frac{3}{4}\int_0^1\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}+\frac{3}{4}\int_0^1\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{12}\int_0^1\frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{4}{3}\ln 2-\frac{3}{4}\ln 3+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1+0-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{4}{3}\ln 2-\frac{3}{4}\ln 3+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1-\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1=\frac{4}{3}\ln 2-\frac{3}{4}\ln 3+$$

$$+\frac{\pi\sqrt{3}}{12}-\frac{\pi\sqrt{3}}{18}=\frac{4}{3}\ln 2-\frac{3}{4}\ln 3+\frac{\pi\sqrt{3}}{36}.$$

Итак, сумма ряда (2) равна

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(6n+1)(6n+2)(6n+3)(6n+4)}=\frac{2}{9}\ln 2-\frac{1}{8}\ln 3+\frac{\pi\sqrt{3}}{216}. \tag{8}$$

Заключение. Рассмотрен ряд обратных обобщённых тетраэдрических чисел 6-го порядка. Вычислена его сумма в замкнутой форме (см. формулу (13) или (14)). Сумма этого ряда отсутствует в известных математических справочниках [3-5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Терещенко И.В. О суммировании ряда обратных обобщенных пентатопических чисел *k*-го порядка. // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн., № 13 - 2015. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://ntk.kubstu.ru/file/737

2. Терещенко И.В. О суммировании ряда обратных обобщенных пентатопических чисел 5-го порядка. // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн., № 1 - 2016. [Электронный ресурс] – Режим доступа:: http://ntk.kubstu.ru/file/792.

3. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 800 с.

4. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Перевод с английского Н.В. Леви.-М. Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1983.-176 с.

5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, рядов и произведений. 7-е изд. Перевод с английского В.В. Максимова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 1232 с.

REFERENCES

1. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada obratnykh obobshchennykh pentatopicheskikh chisel k-go poryadka. // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn., № 13 - 2015. [Elektronnyy resurs] – Rezhim dostupa: http://ntk.kubstu.ru/file/737

2. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada obratnykh obobshchennykh pentatopicheskikh chisel 5-go poryadka. // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn., № 1 - 2016. [Elektronnyy resurs] – Rezhim dostupa:: http://ntk.kubstu.ru/file/792.

3. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integraly i ryady. – M.: Nauka, Gl. red. fiz.-mat. lit., 1981. – 800 s.

4. Dvayt G.B. Tablitsy integralov i drugie matematicheskie formuly. Perevod s angliyskogo N.V. Levi.-M. Nauka, gl. red. fiz.-mat. lit., 1983.-176 s.

5. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tablitsy integralov, ryadov i proizvedeniy. 7-e izd. Perevod s angliyskogo V.V. Maksimova. – SPb.: BKhV-Peterburg, 2011.-1232 s.

ON THE SUMMATION OF THE INFINITE SERIES OF THE GENERALIZED PENTATOPIC NUMBERS' RECIPROCALS OF THE 6-TH ORDER

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072,
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

The infinite series of the generalized pentatopic numbers' reciprocals of the 6-th order is considered. A direct method of calculating the definite integral, whose value is equal to the sum of this series, was proposed. It is shown that the sum of the series is expressed in terms of quadratic irrationality.

Key words: infinite series, telescopic series, infinite series of the reciprocals of the pentatopic numbers, pentatopic numbers.