УДК 517.521

О СУММИРОВАНИИ РЯДА ОБРАТНЫХ ОБОБЩЁННЫХ ПЕНТАТОПИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ 5-ГО ПОРЯДКА

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2,
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Рассмотрен ряд обратных обобщённых пентатопических чисел 5-го порядка. Предложен прямой метод вычисления определённого интеграла, величина которого равна сумме этого ряда. Показано, что сумма ряда выражается через квадратичные иррациональности.

Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, телескопический ряд, ряд обратных пентатопических чисел, пентатопические числа.

1. Сумма обратных обобщённых пентатопических чисел *k*-го порядка. В предыдущей нашей публикации [1] было введено определение *обобщённого пентатопического числа P_n*

$$P_n^k = \frac{(kn+1)(kn+2)(kn+3)(kn+4)}{4!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

В дальнейшем мы будем опускать множитель $\frac{1}{4!}$ при рассмотрении чисел, обратных к обобщённым тетраэдрическим числам. В той же статье [1] через интеграл была найдена сумма бесконечного ряда обратных обобщённых пентатопических чисел k порядка

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(kn+1)(kn+2)(kn+3)(kn+4)} = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(1-x)^3}{1-x^k}\,dx, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1}$$

который был нами вычислен для значений $k = 1, 2, 3, 4$.

2. Сумма ряда обратных обобщённых пентатопических чисел 5-го порядка. Вычислим сумму ряда (1) в случае $k = 5$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)} = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(1-x)^3}{1-x^5}\,dx = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(1-x)^2\,dx}{1+x+x^2+x^3+x^4}. \tag{2}$$

Для вычисления интеграла в формуле (2) разложим на множители многочлен, стоящий в знаменателе, при условии, что $x \neq 0$

$$x^4+x^3+x^2+x+1 = x^2\left(\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1\right)=$$

$$=x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right)=x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{5}{4}\right)=$$

$$=x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)=x^2\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Отсюда получаем искомое разложение, справедливое уже для любого вещественного x

$$x^4+x^3+x^2+x+1=\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right). \qquad (3)$$

Разложим теперь подынтегральную функцию в формуле (2) на простейшие дроби, используя разложение (3)

$$\frac{(1-x)^2}{x^4+x^3+x^2+x+1}=\frac{Ax+B}{x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1}. \qquad (4)$$

Приведём сумму двух дробей в правой части равенства (4) к общему знаменателю

$$\frac{(1-x)^2}{x^4+...+x+1}=\frac{\left(Ax+B\right)\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)+\left(Cx+D\right)\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)}{\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)}.$$

Приравнивая числители, приходим к тождеству

$$1-2x+x^2=(A+C)x^3+\left(B+D+\frac{1-\sqrt{5}}{2}A+\frac{1+\sqrt{5}}{2}C\right)x^2+$$

$$\left(A+C+B\frac{1-\sqrt{5}}{2}+D\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x+B+D,$$

из которого получаем систему линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов

$$\begin{cases} A+C=0, \\ B+D+\dfrac{A+C}{2}+\dfrac{C-A}{2}\sqrt{5}=1, \\ A+C+\dfrac{B+D}{2}+\dfrac{D-B}{2}\sqrt{5}=-2, \\ B+D=1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим неизвестные коэффициенты

$$A=0,\quad B=\frac{\sqrt{5}+1}{2},\quad C=0,\quad D=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Подставим их в разложение (4)

$$\frac{(1-x)^2}{x^4+x^3+x^2+x+1}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}+1}{x^2+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x+1}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}-1}{x^2-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}x+1}$$

и преобразуем интеграл (2)

$$\int_0^1\frac{(1-x)^2dx}{x^4+x^3+x^2+x+1}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)dx}{x^2+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x+1}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)dx}{x^2-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}x+1}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\int_0^1\frac{dx}{\left(x+\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2+\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\int_0^1\frac{dx}{\left(x-\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2+\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}. \quad (5)$$

Для упрощения дальнейших вычислений, положим

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{5}+1}{4},\ 0<\varphi<\frac{\pi}{4}. \quad (6)$$

Тогда

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos 4\varphi = 2\cos^2 2\varphi - 1 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \tag{7}$$

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \quad \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \tag{8}$$

$$\sin 4\varphi = 2\sin 2\varphi\cos 2\varphi = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}. \tag{9}$$

$$\cos 3\varphi = \cos\varphi\cos 2\varphi - \sin\varphi\sin 2\varphi = -\frac{\sqrt{5}-1}{4} \tag{10}$$

$$\sin 3\varphi = \sin\varphi\cos 2\varphi + \cos\varphi\sin 2\varphi = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \tag{11}$$

Отсюда следует, что

$$\cos\varphi = -\cos 4\varphi, \quad \sin\varphi = \sin 4\varphi, \quad \sin 5\varphi = \sin\varphi\cos 4\varphi + \cos\varphi\sin 4\varphi = 0.$$

и

$$\varphi = \frac{\pi}{5}, \quad \cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}. \tag{12}$$

Подставляя формулы (6) – (12) в формулу (5), находим интеграл (2)

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^2\,dx}{x^4+x^3+x^2+x+1} = \int_0^1 \frac{2\cos\varphi dx}{\left(x+\cos\varphi\right)^2+\sin^2\varphi} + \int_0^1 \frac{2\cos 3\varphi dx}{\left(x+\cos 3\varphi\right)^2+\sin^2 3\varphi} =$$

$$= 2\cos\varphi\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} - \operatorname{arctg}\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}}{\sin\varphi} + 2\cos 3\varphi\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{1+\cos 3\varphi}{\sin 3\varphi} - \operatorname{arctg}\dfrac{\cos 3\varphi}{\sin 3\varphi}}{\sin 3\varphi} =$$

$$= 2\cos\varphi\frac{\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2} - \operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\varphi}{\sin\varphi} + 2\cos 3\varphi\frac{\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\dfrac{3\varphi}{2} - \operatorname{arctg}\operatorname{ctg}3\varphi}{\sin 3\varphi} =$$

$$= 2\cos\varphi\frac{\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{arctg}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)}{\sin\varphi} +$$

$$+2\cos 3\varphi\frac{\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3\varphi}{2}\right) - \operatorname{arctg}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-3\varphi\right)}{\sin 3\varphi} = \varphi\operatorname{ctg}\varphi + 3\varphi\operatorname{ctg}3\varphi.$$

Итак, сумма ряда (2) равна

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)}=\frac{\varphi}{6}\operatorname{ctg}\varphi+\frac{3\varphi}{6}\operatorname{ctg}3\varphi,\ \varphi=\frac{\pi}{5}. \qquad (13)$$

Впрочем, с помощью формул (6), (8), (10) и (11) можно формулу (13) переписать без использования тригонометрических функций

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)}=\frac{\pi}{30\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}-3\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}\right). \qquad (14)$$

Заключение. Рассмотрен ряд обратных обобщённых пентатопических чисел 5-го. Вычислена его сумма в замкнутой форме (см. формулу (13) или (14)). Сумма этого ряда отсутствует в известных математических справочниках [2-4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Терещенко И.В. О суммировании ряда обратных обобщенных пентатопических чисел *k*-го порядка. // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 13. [Электронный ресурс] – Режим доступа: URL: http://ntk.kubstu.ru/file/737

2. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 800 с.

3. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Перевод с английского Н.В. Леви.-М. Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1983.-176 с.

4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, рядов и произведений. 7-е изд. Перевод с английского В.В. Максимова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 1232 с.

REFERENCES

1. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada obratnykh obobshchennykh pentatopicheskikh chisel k-go poryadka. // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 13. [Elektronnyy resurs] – Rezhim dostupa: URL: http://ntk.kubstu.ru/file/737

2. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integraly i ryady. – M.: Nauka, Gl. red. fiz.-mat. lit., 1981. – 800 s.

3. Dvayt G.B. Tablitsy integralov i drugie matematicheskie formuly. Perevod s angliyskogo N.V. Levi.-M. Nauka, gl. red. fiz.-mat. lit., 1983.-176 s.

4. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tablitsy integralov, ryadov i proizvedeniy. 7-e izd. Perevod s angliyskogo V.V. Maksimova. – SPb.: BKhV-Peterburg, 2011.-1232 s.

ON THE SUMMATION OF THE INFINITE SERIES OF THE GENERALIZED TETRAHEDRAL NUMBERS' RECIPROCALS OF THE 5-TH ORDER

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072,
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

The infinite series of the generalized pentatopic numbers’ reciprocals of the 5-th order is considered. A direct method of calculating the definite integral, whose value is equal to the sum of this series, was proposed. For each parameter’s value the sum of such series was calculated through the integral. It is shown that the sum of the series is expressed in terms of quadratic irrationality.

Key words: infinite series, telescopic series, infinite series of the reciprocals of the pentatopic numbers, pentatopic numbers.