УДК 517.521

О СУММИРОВАНИИ РЯДА ОБРАТНЫХ ОБОБЩЁННЫХ ПЕНТАТОПИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ К-ГО ПОРЯДКА

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Предложено семейство рядов, обобщающих ряд обратных пентатопических чисел, зависящее от одного натурального параметра. Для каждого значения параметра вычислена сумма такого ряда через интеграл. Для простейших случаев (значений параметра 1, 2, 3 и 4) интеграл вычислен в замкнутой форме.
Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, телескопический ряд, ряд обратных пентатопических чисел, фигурные числа.

1. Сумма обратных пентатопических чисел. Как известно, *пентатопическим числом* или *пентахорическим числом* $P_4(n)$ называется сумма первых *n* тетраэдрических чисел $P_3(n)$. В свою очередь *тетраэдрическим числом* $P_3(n)$ называется сумма первых *n* треугольных чисел $P_2(n)$. *Треугольным числом* $P_2(n)$ называется сумма первых *n* натуральных чисел. Из этих определений получаем замкнутые выражения для упомянутых чисел через факториальные степени и биноминальные коэффициенты

$$P_2(n) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^{\overline{2}}}{2!} = C_n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$P_3(n) = P_2(1) + P_2(2) + \ldots + P_2(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} = \frac{n^{\overline{3}}}{3!} = C_n^3, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$P_4(n) = P_3(1) + \ldots + P_3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!} = \frac{n^{\overline{4}}}{4!} = C_n^4, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

В 1650 году в сочинении «Новые арифметические квадратуры или о сложении дробей» [1, 2, 3] итальянский математик, профессор Болонского университета, Пиетро Менголи (1626 – 1686) нашёл сумму бесконечного ряда обратных треугольных чисел

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{P_2(n+1)} = \frac{2}{1\cdot 2} + \frac{2}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{2}{(n+1)\cdot(n+2)} + \ldots = 2, \tag{1}$$

опередив на десятилетия Гюйгенса, Лейбница и Якова Бернулли. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}+...=1, \qquad (2)$$

с членами вдвое меньшими обратных треугольных чисел, получил название телескопического ряда или ряда Менголи [2].

В другом своём сочинении [2, 4], Менголи нашёл разложение в ряд для логарифма $\ln 2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{(-1)^n}{n+1}+...=\ln 2\,.$$

Если сгруппировать в этом ряде слагаемые парами, начиная с первого члена, то получим для логарифма следующий сходящийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+2)}+...=\ln 2\,, \qquad (2)$$

который представляет собой сумму ряда (1) без чётных членов. В таком виде ряд (2) был впервые опубликован в 1668 году Уильямом Броункером (1620 – 1684), первым президентом Лондонского королевского общества [2, 5].

Ряды (1) и (2), очевидно, является частными случаями более общего ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(kn+1)(kn+2)}=\frac{1}{1\cdot 2}+...+\frac{1}{(kn+1)\cdot(kn+2)}+..., \quad k=1,2,3,..., \qquad (3)$$

который мы назвали обобщённым рядом Менголи – Броункера или рядом Менголи – Броункера *k*-го порядка или рядом обратных треугольных чисел [6]. Суммы этого ряда для всех значений *k* найдены нами в серии работ [6-13].

Так же нетрудно найти сумму бесконечного ряда обратных тетраэдрических чисел как сумму телескопического ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3!}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{P_3(1)}+\frac{1}{P_3(2)}+\frac{1}{P_3(3)}+...+\frac{1}{P_3(n)}+...=\frac{3}{2}\,. \qquad (4)$$

Нам не известно, кто вычислил её первым. Формула (4) приведена на странице сетевой энциклопедии ВикипедиИ в статье «Тетраэдрические числа» [14]. Вывод более общей формулы, чем формула (4), с членами в 6 раз меньшими, можно найти в книге [15]. В этом же виде формула приведена в справочниках [16, 17].

Ряд (4), очевидно, является частным случаем более общего сходящегося ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(kn+1)(kn+2)(kn+3)}, \quad k=1,2,3,\ldots, \tag{5}$$

который мы назвали рядом обратных обобщённых тэтраэдрических чисел k-го порядка (Мы опускаем нормировочный множитель 3!) [18].

Мы можем, как и в случае ряда (4), найти сумму бесконечного ряда обратных пентатопических чисел

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4!}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{1}{P_4(1)}+\frac{1}{P_4(2)}+\ldots+\frac{1}{P_4(n)}+\ldots=\frac{4}{3}. \tag{6}$$

Нам так же не известно, кто вычислил её первым. Формула (6) приведена на странице сетевой энциклопедии ВикипедиИ в статье ”Pentatope number” [19].

Ряд (6) является частным случаем более общего сходящегося ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(kn+1)(kn+2)(kn+3)(kn+4)}, \quad k=1,2,3,\ldots, \tag{7}$$

который мы назовём рядом обратных обобщённых пентатопических чисел k-го порядка (Мы опускаем нормировочный множитель 4!).

2. Вычисление суммы ряда обобщённых пентатопических k-го порядка через интеграл. Покажем, что ряд (7) сходится для любого натурального k и его сумма равна

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(kn+1)(kn+2)(kn+3)(kn+4)}=\frac{1}{3!}\int_0^1\frac{(1-x)^3dx}{1-x^k}, \quad k=1,2,3,\ldots. \tag{8}$$

Воспользуемся равенством

$$\frac{1}{(kn+1)(kn+2)(kn+3)(kn+4)}=\frac{1}{3}\frac{1}{(kn+1)(kn+2)(kn+3)}-$$

$$-\frac{1}{3}\frac{1}{(kn+2)(kn+3)(kn+4)}=\frac{1}{3\cdot 2}\left(\frac{1}{(kn+1)(kn+2)}-\frac{1}{(kn+2)(kn+3)}\right)-$$

$$-\frac{1}{3\cdot 2}\left(\frac{1}{(kn+2)(kn+3)}-\frac{1}{(kn+3)(kn+4)}\right)=$$

$$=\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{(kn+1)(kn+2)}-\frac{2}{(kn+2)(kn+3)}+\frac{1}{(kn+3)(kn+4)}\right)=$$

$$=\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{kn+1}-\frac{3}{kn+2}+\frac{3}{kn+3}-\frac{1}{kn+4}\right)=$$

$$=\frac{1}{3!}\left(\int_0^1 x^{kn}dx-3\int_0^1 x^{kn+1}dx+3\int_0^1 x^{kn+2}dx-\int_0^1 x^{kn+3}dx\right)=\frac{1}{3!}\int_0^1 x^{kn}(1-x)^3dx\,. \qquad (9)$$

Вычислим теперь m-ю частичную сумму для натурального значения $k\geq 2$

$$S_m=\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{(kn+1)(kn+2)(kn+3)(kn+4)}=\frac{1}{3!}\sum_{n=0}^{m}\int_0^1 x^{kn}(1-x)^3dx=$$

$$=\frac{1}{3!}\int_0^1(1-x)^3\sum_{n=0}^{m}x^{kn}dx=\frac{1}{3!}\int_0^1(1-x)^3\frac{1-x^{km+k}}{1-x^k}dx=\frac{1}{3!}\int_0^1\frac{(1-x)^2(1-x^{km+k})dx}{1+x+\ldots+x^{k-1}}=$$

$$=\frac{1}{3!}\int_0^1\frac{(1-x)^2dx}{1+\ldots+x^{k-1}}-\frac{1}{3!}\int_0^1\frac{(1-x)^2x^{km+k}dx}{1+\ldots+x^{k-1}}\,.$$

Отсюда получаем оценку

$$0\leq\frac{1}{3!}\int_0^1\frac{(1-x)^2dx}{1+x+\ldots+x^{k-1}}-S_m=\int_0^1\frac{\frac{(1-x)^2}{3!}x^{km+k}dx}{1+x+\ldots+x^{k-1}}\leq\int_0^1\frac{x^{km+k}}{3!}dx\leq\frac{1}{3!}\frac{1}{km+k+1}\,. \qquad (10)$$

Пусть теперь $k=1$. Вычислим теперь m-ю частичную сумму, используя равенство (9)

$$S_m=\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=\sum_{n=0}^{m}\int_0^1\frac{x^n(1-x)^3}{3!}dx=\int_0^1\frac{(1-x)^3}{3!}\sum_{n=0}^{m}x^ndx=$$

$$=\int_0^1\frac{(1-x)^3}{3!}\frac{1-x^{m+1}}{1-x}dx=\int_0^1\frac{(1-x)^2}{3!}\left(1-x^{m+1}\right)dx=\int_0^1\frac{(1-x)^2}{3!}dx-\int_0^1\frac{(1-x)^2}{3!}x^{m+1}dx\,.$$

Отсюда получаем, что оценка (10) справедлива для значения $k=1$

$$0 \le \int_0^1 dx - S_m = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{3!} x^{m+1} dx \le \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{3!} dx \le \frac{1}{3!}\frac{1}{m+2}.$$

Переходя здесь к пределу при стремлении $m \to \infty$ и применяя теорему о двух милиционерах, получим, с учётом сделанного выше замечания, сумму ряда (7)

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \frac{1}{3!}\int_0^1 \frac{\left(1-x\right)^2 dx}{1+x+...+x^{k-1}}.$$

Заключение. Рассмотрен ряд обобщённых пентатопических чисел k-го порядка для любого натурального значения k. Вычислена его сумма через интеграл (см. формулу (8)). Для значений $k = 1, 2$ и 3 суммы легко вычисляются

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{1}{3!}\int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{18},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)} = \frac{1}{3!}\int_0^1 \frac{(1-x)^2 dx}{1+x} = \int_0^1 \frac{(x-3)}{6} dx +$$

$$+\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{5}{12},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)(3n+4)} = \frac{1}{3!}\int_0^1 \frac{(1-x)^2 dx}{1+x+x^2} = \frac{1}{6}\int_0^1 \left(1 - \frac{3x}{x^2+x+1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x+1/2)dx}{(x+1/2)^2+3/4} + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\ln 3 +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\ln 3 + \frac{\pi\sqrt{3}}{36}.$$

Несколько сложнее найти сумму ряда (8) для значения $k = 4$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)} = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(1-x)^2 dx}{1+x+x^2+x^3} = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(1-x)^2 dx}{(1+x)(x^2+1)}. \quad (11)$$

Разложим подынтегральную функцию на сумму двух рациональных дробей методом неопределённых коэффициентов

$$\frac{(1-x)^2}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A(1+x^2)+(Bx+C)(1+x)}{(1+x)(1+x^2)}$$

и приравняем числители

$$x^2 - 2x + 1 = A(1+x^2) + (Bx+C)(1+x) = (A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C).$$

Отсюда получаем систему алгебраических уравнений

$$A+B=1; \quad B+C=-2; \quad A+C=1,$$

из которой находим, что $A=2, \quad B=-1, \quad C=-1$. Тогда

$$\frac{(1-x)^2}{1+x+x^2+x^3} = \frac{(1-x)^2}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{2}{1+x} - \frac{x+1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}.$$

Подставляя в формулу (7), находим сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)} = \frac{1}{6}\int_0^1 \left(\frac{2}{1+x} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{\ln 2}{4} + \frac{\pi}{24}.$$

Суммы этих четырех рядов обычно приводятся в известных математических справочниках [6, 7].

Целью наших дальнейших исследований будет нахождение сумм рядов Менголе – Броункера для значений $k = 5, 6, 7$ и 8.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mengoli Pietro. Novae quadraturae arithmeticae, seu De additione fractionum. – Bononiae: Ex typographia Iacobi Montij, 1650.

2. История математики. Т2. Математика XVII столетия. Под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 301 с.

3. Cajori F. A History of Mathematics. 2-nd ed. – L.: Macmillan & Co., Ltd, 1919, p. 173.

4. Mengoli Pietro. Geometriae speciosae elementa. – Bononiae, 1659.

5. Brouncker W. The squaring of the Hyperbola by an infinite series of rational numbers. Philos. Trans., 1668.

6. Терещенко И.В. О суммировании ряда Менголи - Броункера *k*-го порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/546.

7. Терещенко И.В. О суммировании ряда Менголи - Броункера 5-го порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/571.

8. Терещенко И.В. О еще одном способе суммирования ряда Менголи - Броункера 5-го порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/607.

9. Терещенко И.В. О суммировании ряда Менголи - Броункера 6-го порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/608.

10. Терещенко И.В. О суммирования ряда Менголи - Броункера 8-го порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 11. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/616.

11. Терещенко И.В. О еще одном способе суммирования ряда Менголи - Броункера 8-го порядка. [Электронный ресур6с] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 11. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/628.

12. Терещенко И.В. О суммировании ряда Менголи - Броункера нечётного порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 11. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/631.

13. Терещенко И.В. О суммировании ряда Менголи - Броункера чётного порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 11. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/633.

14. https://ru.wikipedia.org/wiki/Тетраэдрические_числа.

15. Фихтенгольц М.Г. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Т.2. 9-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2009. – 800 с.

16. Adams E.P. and Hippisley R.L. Smithsonian Mathematical Formulae and Tables of Elliptic Functions, Smithsonian Institute, Washington, D.C., 1922.

17. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, рядов и произведений. 7-е изд. Перевод с английского В.В. Максимова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 1232 с.

18. Терещенко И.В. О суммировании ряда обобщённых тетраэдрических чисел *k*-го порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 12. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/710.

19. https://en.wikipedia.org/wiki/Pentatope_number.

20. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 800 с.

REFERENCES

1. Mengoli Pietro. Novae quadraturae arithmeticae, seu De additione fractionum. – Bononiae: Ex typographia Iacobi Montij, 1650.

2. Istoriya matematiki. T2. Matematika XVII stoletiya. Pod red. A.P. Yushkevicha. – M.: Nauka, 1970. – 301 s.

3. Cajori F. A History of Mathematics. 2-nd ed. – L.: Macmillan & Co., Ltd, 1919, p. 173.

4. Mengoli Pietro. Geometriae speciosae elementa. – Bononiae, 1659.

5. Brouncker W. The squaring of the Hyperbola by an infinite series of rational numbers. Philos. Trans., 1668.

6. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada Mengoli - Brounkera k-go poryadka. [Elektronnyy resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/546.

7. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada Mengoli - Brounkera 5-go poryadka. [Elektronnyy resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/571.

8. Tereshchenko I.V. O eshche odnom sposobe summirovaniya ryada Mengoli - Brounkera 5-go poryadka. [Elektronnyy resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/607.

9. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada Mengoli - Brounkera 6-go poryadka. [Elektronnyy resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/608.

10. Tereshchenko I.V. O summirovaniya ryada Mengoli - Brounkera 8-go poryadka. [Elektronnyy resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 11. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/616.

11. Tereshchenko I.V. O eshche odnom sposobe summirovaniya ryada Mengoli - Brounkera 8-go poryadka. [Elektronnyy resur6s] // Nauchnye trudy

KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 11. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/628.

12. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada Mengoli - Brounkera nechetnogo poryadka. [Elektronnyy resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 11. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/631.

13. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada Mengoli - Brounkera chetnogo poryadka. [Elektronnyy resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 11. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/633.

14. https://ru.wikipedia.org/wiki/Tetraedricheskie_chisla.

15. Fikhtengolts M.G. Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya. V 3-kh tt. T.2. 9-e izd., ster. – SPb.: Lan, 2009. – 800 s.

16. Adams E.P. and Hippisley R.L. Smithsonian Mathematical Formulae and Tables of Elliptic Functions, Smithsonian Institute, Washington, D.C., 1922.

17. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tablitsy integralov, ryadov i proizvedeniy. 7-e izd. Perevod s angliyskogo V.V. Maksimova. – SPb.: BKhV-Peterburg, 2011. – 1232 s.

18. Tereshchenko I.V. O summirovanii ryada obobshchennykh tetraedricheskikh chisel k-go poryadka. [Elektronnyy resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2015. № 12. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/710.

19. https://en.wikipedia.org/wiki/Pentatope_number.

20. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integraly i ryady. – M.: Nauka, Gl. red. fiz.-mat. lit., 1981. – 800 s.

ON THE SUMMATION OF THE INFINITE SERIES OF THE GENERALIZING PENTATOPIC NUMBERS' RECIPROCALS OF THE K-TH ORDER

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

The family of infinite series was proposed generalizing infinite series of the reciprocals of the pentatopic numbers and depending on the natural parameter. For each parameter’s value the sum of such series was calculated through the integral. For simple cases (parameter values 1, 2, 3, and 4) the integral was calculated in closed form.

Key words: infinite series, telescopic series, infinite series of the reciprocals of the pentatopic numbers, Figurate numbers.