УДК 330.4:331.52

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РЫНКОМ ТРУДА

С.В. КИСЛЯКОВ

*Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2,
электронная почта: ks03@list.ru*

Предлагается использовать аппарат математической теории оптимального управления при разработке и осуществлении программ государственного регулирования рынка труда. Разработана математическая модель, основу которой составляет квадратичный функционал интегрального типа. Его минимизация позволяет достичь наименьшей разбалансированности рынка труда к концу заданного периода времени при условии минимальной суммарной разбалансированности за весь период.
Ключевые слова: оптимальное управление, рынок труда, емкость рынка рабочей силы.

Современные условия развития рынка труда требуют активного государственного вмешательства. Процесс регулирования рынка труда представляет собой неотъемлемую составную часть и одновременно сложную подсистему рыночной экономики. С целью регулирования занятости и безработицы государство может применять целый комплекс методов, в частности экономические, административные, социально-психологические. Методы регулирования формируют два основных типа политики государства на рынке труда – активной и пассивной. Пассивная политика сводится к регистрации ищущих работу, определению размера пособий по безработице, разработке неденежных форм поддержки безработных и их семей. Активная политика включает в себя профессиональную подготовку и переподготовку кадров, изменение количества рабочих мест и ряд других мероприятий. Меры активной политики способствуют структурной перестройке экономики и требует значительных затрат, что делает весьма актуальной задачу их оптимизации.

С целью снижения затрат и повышения эффективности результатов активной политики предлагается при разработке и осуществлении программ государственного регулирования рынка труда использовать аппарат математической теории оптимального управления. Разработана математическая модель, основу которых составляет квадратичный функционал интегрального типа. Его минимизация позволяет достичь наименьшей разбалансированности рынка труда к концу заданного периода времени при условии минимальной суммарной разбалансированности за весь период. В качестве функции управления используется емкость рынка рабочей силы (что отвечает задачам планирования подготовки и переподготовки кадров).

Рассмотрим математическую модель рынка труда, предложенную в [1]. Введем следующие обозначения. Пусть $y(t)$ - общее число рабочих мест в отрасли в момент времени t; $u(t)$ - емкость рынка рабочей силы отрасли. Тогда величину $x(t) = u(t) - y(t)$ можно рассматривать как показатель сбалансированности рынка труда в отрасли. Значение $x(t) = 0$ говорит о сбалансированности рынка, величина $x(t) > 0$ характеризует количество безработных, $x(t) < 0$ - недостаток трудовых ресурсов отрасли. Пусть $q(t)$ - вероятность увольнения работника в момент времени t, $p(t)$ - вероятность того, что потенциальный работник сможет найти работу.

С учетом введенных обозначений получаем систему уравнений, описывающих динамику баланса рынка труда:

$$\dot{x}(t) = q(t)y(t) - p(t)x(t).$$

Подставляя соотношение связи $y(t) = u(t) - x(t)$, получаем:

$$\dot{x}(t) = q(t)(u(t) - x(t)) - p(t)x(t) = -(p(t) + q(t))x(t) + q(t)u(t)$$

или

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + q(t)u(t),$$

где $a(t) = -(p(t) + q(t))$.

Полагая известными значения $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $u(0) = u_0$, определим цель: достичь минимальной разбалансированности рынка труда к концу заданного периода времени $t \in [0, T]$. При этом суммарная разбалансированность за весь период должна быть минимальной. В качестве функции управления будем рассматривать $u(t)$- емкость рынка рабочей силы отрасли. Регулирование емкости рынка труда отраслей требует достаточно больших затрат, связанных с необходимостью переподготовки кадров, изменением структуры образования и другими мероприятиями. Поэтому в качестве обязательного условия потребуем минимальных изменений емкости рынка труда относительно первоначальных пропорций ($\Delta u(t) = u(t) - u_0 \to \min$). Поскольку отклонения функций $x(t)$ и $u(t)$ могут быть как положительными, так и отрицательными, в качестве показателей их отклонения от нулевых значений целесообразно использовать квадратичные зависимости.

Наиболее полно поставленной цели с учетом приведенных требований отвечает квадратичный функционал

$$\Im = \int_0^T \left(g_1(t) x^2(t) + g_2(t)(u(t) - u_0)^2 \right) dt + g_3 x^2(T) .$$

Здесь $g_1(t)$, $g_2(t)$, g_3 - функции приоритетов. В простейшем случае, когда все показатели равноправны, в качестве g_1, g_2, g_3 могут быть использованы единичные значения. В общем случае более важным показателям могут присваиваться более высокие «весовые» коэффициенты, что приведет к преимущественной оптимизации именно этих показателей. Зависимость от времени говорит о том, что приоритеты могут изменяться.

Возможны частные случаи задачи:

$g_1(t) \equiv 0$ - в этом случае ставится задача достижения оптимального значения $x(t)$ к заданному моменту времени T без требования суммарного минимального значения за период $[0, T]$;

$g_3 \equiv 0$ - ставится задача минимизации суммарной разбалансированности рынка труда за период времени $[0, T]$.

Значение $g_2(t) \equiv 0$ использовать нецелесообразно, поскольку в этом случае снимаются ограничения на управление и получаем тривиальное решение: $u^*(t) = y(t)$, $x^*(t) \equiv 0$.

Получаем математическую постановку задачи: минимизировать функционал

$$\Im=\int_0^T\left(g_1(t)x^2(t)+g_2(t)(u(t)-u_0)^2\right)dt+g_3x^2(T)$$

на траекториях линейной системы

$$\dot{x}(t)=a(t)x(t)+q(t)u(t)\,,\ t\in[0,T]\,,\ x(0)=x_0\,,\ u(0)=u_0\,,\ x\in R\,,\ u\in R\,.$$

Для построения решения задачи используем принцип максимума Л.С. Понтрягина [2,3].

Введем сопряженную переменную $\lambda(t)$ и сформируем функцию Гамильтона:

$$H(t,x(t),u(t),\lambda(t))=-g_1(t)x^2(t)-g_2(t)(u(t)-u_0)^2+\lambda(t)(a(t)x(t)+q(t)u(t))\,.$$

Необходимые условия оптимальности задаются соотношениями

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0\,,\qquad \dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}\,.$$

Построим оптимальное управление.

$$\frac{\partial H}{\partial u}=q(t)\lambda(t)-2g_2(t)(u(t)-u_0)=0\,,$$

отсюда

$$u^*(t)=u_0+\frac{q(t)}{2g_2(t)}\lambda(t)\,.$$

Определяем оптимальную траекторию и сопряженную переменную. Подставляя $u^*(t)$ в уравнение системы, получаем:

$$\dot{x}(t)=a(t)x(t)+q(t)u^*(t)=a(t)x(t)+\frac{q^2(t)}{2g_2(t)}\lambda(t)+q(t)u_0\,.$$

Из необходимых условий оптимальности имеем:

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}=-a(t)\lambda(t)+2g_1(t)x(t)\,.$$

Граничные условия для системы дифференциальных уравнений получаем из постановки задачи: $x(0)=x_0$ и условий трансверсальности: $\lambda(T)=-\frac{\partial}{\partial x}g_3x^2(T)=-2g_3x(T)\,.$

Таким образом, оптимальная траектория $x^*(t)$ и сопряженная переменная $\lambda(t)$ определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + \frac{q^2(t)}{2g_2(t)}\lambda(t) + q(t)u_0,$$

$$\dot{\lambda}(t) = -a(t)\lambda(t) + 2g_1(t)x(t)$$

с граничными условиями $x(0) = x_0$, $\lambda(T) = -2g_3x(T)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Семенчин Е.А., Зайцева И.В. Математическая модель самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики.//Экономика и мат. методы. Т43, № 1

2. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1989.

3. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1979.

REFERENCES

1. Semenchin E.A., Zajceva I.V. Matematicheskaja model' samoorganizacii rynka truda dlja neskol'kih otraslej jekonomiki (Mathematical model of self-organization of the labor market for a number of industries). //Jekonomika i mat. metody. T43, № 1.

2. Afanas'ev V.N., Kolmanovskij V.B., Nosov V.R. Matematicheskaja teorija konstruirovanija sistem upravlenija (The mathematical theory of of designing control systems). M.: Vysshaja shkola, 1989.

3. Rojtenberg Ja.N. Avtomaticheskoe upravlenie (Automatic control) Automatic control. M.: Nauka, 1979.

MATHEMATICAL MODEL OF OPTIMAL MANAGEMENT LABOUR MARKET

S.V. KISLYAKOV

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: ks03@list.ru

It is proposed to use the apparatus of the mathematical theory of optimal control in the development and implementation of state regulation of the labor market. A mathematical model, which is based on a quadratic functional integral type. It allows for the minimization of the smallest imbalance in the labor market at the end of a given period of time, provided the minimum total imbalance for the entire period.

Key words: optimal control, the labor market, the capacity of the labor market.