УДК 517.521

О СУММИРОВАНИИ РЯДА МЕНГОЛИ - БРОУНКЕРА НЕЧЁТНОГО ПОРЯДКА

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Рассмотрен ряд Менголи – Броункера нечётного порядка. Предложен прямой метод вычисления определённого интеграла, величина которого равна сумме этого ряда. Показано, что сумма ряда выражается в замкнутой форме.
Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, ряд Менголи – Броункера *k*-го порядка, ряд Менголи – Броункера нечётного порядка, П. Менголи, У. Броункер.

1. Ряд Менголи – Броункера нечётного порядка. В нашей работе [1] бесконечный положительный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(kn+1)(kn+2)}=\int_0^1\frac{dx}{1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}},\quad k=1,2,3,\ldots. \qquad (1)$$

получил название ряда Менголи - Броункера *k*-го порядка в честь двух почти забытых в наше время математиков. Первый из них, итальянский математик, профессор Болонского университета, Пиетро Менголи (1626 – 1686) в 1650 году нашёл сумму ряда обратных треугольных чисел [2, 3, 4]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{T_{n+1}}=\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{2}{(n+1)\cdot(n+2)}+\ldots=2,$$

который по нашей классификации является рядом Менголи – Броункера 1-го порядка с увеличенными в два раза членами.

В другом своём сочинении [3, 5], Менголи нашёл разложение в ряд для $\ln 2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n+1}+\ldots=\ln 2.$$

Если сгруппировать в этом ряде слагаемые парами, начиная с первого члена, то получим для логарифма следующий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+2)}+...=\ln 2\,.$$

Он представляет собой сумму ряда (1) для значения $k=2$. В таком виде ряд был впервые опубликован в 1668 году Уильямом Броункером (1620 – 1684), первым президентом Лондонского королевского общества [3, 6].

Из формулы (1) следует, что в случае нечётного порядка $k=2m+1$, где $m=0,1,2,...,$ ряд (1) сходится к сумме

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{((2m+1)n+1)((2m+1)n+2)}=\int_0^1\frac{dx}{1+x+x^2+...+x^{2m-1}+x^{2m}}\,. \tag{2}$$

Интеграл в правой части, равный сумме ряда в левой части формулы (2), был вычислен нами для значений:

$k=3$ (см. [1])

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}=\int_0^1\frac{dx}{1+x+x^2}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,, \tag{3}$$

$k=5$ (через радикалы, см. [7])

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)(5n+2)}=\int_0^1\frac{dx}{1+x+x^2+x^3+x^4}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{\pi\sqrt{2}\sqrt[4]{5}}{200}\left(\left(\sqrt{5}+1\right)^{\frac{3}{2}}+3\left(\sqrt{5}-1\right)^{\frac{3}{2}}\right), \tag{4}$$

$k=5$ (через значения тригонометрических функций, см. [8])

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)(5n+2)}=\int_0^1\frac{dx}{1+x+x^2+x^3+x^4}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\ln(2\cos\varphi)+\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\varphi-\frac{\cos 3\varphi}{\sin 3\varphi}3\varphi\right)\right),\quad \varphi=\frac{\pi}{5},\qquad (5)$$

Целью данной работы является вычисление интеграла (2) для произвольного натурального числа m и нахождение суммы ряда (1) для произвольного нечётного порядка k.

2. Вычисление суммы ряда Менголи – Броункера нечётного порядка. Для вычисления интеграла (2) воспользуемся приёмами, изложенными в [9]. Найдём корни многочлена, стоящего в знаменателе в формуле (2). Для этого решим уравнение

$$x^{2m}+x^{2m-1}+...+x^2+x+1=0,\quad m=1,2,3,...,\qquad (6)$$

Очевидно, что $x=1$ не является корнем этого уравнения. Умножая его на разность $x-1$, получим равносильное уравнение

$$(x-1)(x^{2m}+x^{2m-1}+...+x^2+x+1)=0,\quad x\neq 1,$$

или

$$x^{2m+1}-1=0,\quad x\neq 1.\qquad (7)$$

Корни этого уравнения являются комплексными корнями степени $2m+1$ из единицы

$$x_k=\sqrt[2m+1]{1}_k=e^{i\frac{2\pi k}{2m+1}},\quad k=1,2,3,...,2m.\qquad (8)$$

Следовательно, справедливо разложение

$$x^{2m}+x^{2m-1}+...+x^2+x+1=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{2m-1})(x-x_{2m}).\qquad (9)$$

Тогда подынтегральную функцию в интеграле (2) можно разложить на простейшие рациональные дроби

$$\frac{1}{1+x+x^2+...+x^{2m-1}+x^{2m}}=\frac{x-1}{x^{2m+1}-1}=\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{k=1}^{2m}\frac{A_k}{x-x_k},\quad x\neq 1. \qquad (10)$$

Умножив левую и правую часть этого равенства для каждого значения $s=1,2,3,...,2m$ на разность $x-x_s$ и, переходя к пределу при $x\to x_s$, получим

$$\lim_{x\to x_s}\frac{P(x)}{\dfrac{Q(x)-Q(x_s)}{x-x_s}}=\frac{P(x_s)}{Q'(x_s)}=\frac{x_s-1}{(2m+1)x_s^{\ 2m}}=A_s+\lim_{x\to x_s}\left(x-x_s\right)\sum_{k=1,k\neq s}^{2m}\frac{A_k}{x-x_k},\quad x\neq 1.$$

Так как $\lim\limits_{x\to x_s}\left(x-x_s\right)\sum\limits_{k=1,k\neq s}^{2m}\dfrac{A_k}{x-x_k}=0$, то из последнего равенства находим все коэффициенты разложения (10)

$$A_k=\frac{x_k-1}{(2m+1)x_k^{\ 2m}}=\frac{(x_k-1)x_k}{(2m+1)x_k^{\ 2m+1}}=\frac{(x_k-1)x_k}{2m+1},\quad k=1,2,...,2m. \qquad (11)$$

Перейдём от корней (8) к их комплексно сопряженным значениям

$$x_k^*=e^{-i\frac{2\pi k}{2m+1}}=e^{i2\pi}e^{-i\frac{2\pi k}{2m+1}}=e^{i\frac{2\pi(2m+1-k)}{2m+1}}=x_{2m+1-k},\quad k=1,2,3,...,m. \qquad (12)$$

Из формулы (12) следует, что эти корни образуют комплексно сопряжённые пары

$$x_1^*=x_{2m+1-1}=x_{2m},\quad x_2^*=x_{2m+1-2}=x_{2m-1},\ ...,\quad x_m^*=x_{2m+1-m}=x_{m+1}, \qquad (13)$$

и удовлетворяют соотношениям

$$x_k+x_k^*=e^{i\frac{2\pi k}{2m+1}}+e^{-i\frac{2\pi k}{2m+1}}=2\cos\frac{2\pi k}{2m+1}, \qquad (14)$$

$$x_k x_k^*=1,\quad x_k=x_1^k,\quad k=1,2,3,...,2m \qquad (15)$$

Используя формулы (13), перепишем формулу (10), то есть разложение многочлена $x^{2m}+x^{2m-1}+...+x^2+x+1$ на множители, следующим образом

$$x^{2m}+x^{2m-1}+...+x+1=(x-x_1)(x-x_1^*)(x-x_2)(x-x_2^*)...(x-x_m)(x-x_m^*)\,. \qquad (16)$$

Заметим, что из формул (13) следует, что коэффициенты, задаваемые формулой (11), образуют комплексно сопряжённые пары

$$A_k^*=\frac{(x_k^*-1)x_k^*}{2m+1}=\frac{(x_{2m+1-k}-1)x_{2m+1-k}}{2m+1}=A_{2m+1-k}, \quad k=1,2,...,m\,. \qquad (17)$$

Теперь мы можем переписать разложение (10) следующим образом

$$\frac{1}{1+x+...+x^{2m-1}+x^{2m}}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{A_k}{x-x_k}+\frac{A_k^*}{x-x_k^*}\right)$$

или

$$\frac{1}{1+x+...+x^{2m-1}+x^{2m}}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{A_k(x-x_k^*)+A_k^*(x-x_k)}{(x-x_k)(x-x_k^*)}\right).$$

Так как согласно формулам (15) $x_1x_1^*=...=x_mx_m^*=1$, то отсюда получаем

$$\frac{1}{1+x+...+x^{2m-1}+x^{2m}}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{(A_k+A_k^*)x-(A_kx_k^*+A_k^*x_k)}{x^2-(x_k+x_k^*)x+1}\right)$$

или

$$\frac{1}{1+x+...+x^{2m-1}+x^{2m}}=\sum_{k=1}^{m}(A_k+A_k^*)\frac{x-\dfrac{(A_kx_k^*+A_k^*x_k)}{(A_k+A_k^*)}}{x^2-(x_k+x_k^*)x+1}\,.$$

Отсюда

$$\frac{1}{1+x+...+x^{2m-1}+x^{2m}}=\sum_{k=1}^{m}(A_k+A_k^*)\frac{x-\dfrac{x_k+x_k^*}{2}+\dfrac{x_k+x_k^*}{2}-\dfrac{(A_kx_k^*+A_k^*x_k)}{(A_k+A_k^*)}}{x^2-(x_k+x_k^*)x+1}\,.$$

Из последнего равенства получаем

$$\frac{1}{1+x+\ldots+x^{2m-1}+x^{2m}}=\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k+A_k^*}{2}\,\frac{2x-x_k-x_k^*}{x^2-(x_k+x_k^*)x+1}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\frac{A_k-A_k^*}{2}(x_k-x_k^*)}{x^2-(x_k+x_k^*)x+1}$$

или

$$\frac{1}{1+x+\ldots+x^{2m-1}+x^{2m}}=\sum_{k=1}^{m}B_k\,\frac{2x-x_k-x_k^*}{x^2-(x_k+x_k^*)x+1}+\sum_{k=1}^{m}\frac{C_k}{x^2-(x_k+x_k^*)x+1},\quad(18)$$

где

$$B_k=\frac{A_k+A_k^*}{2},\quad k=1,2,\ldots,m,\quad(19)$$

$$C_k=\frac{(A_k-A_k^*)(x_k-x_k^*)}{2},\quad k=1,2,\ldots,m.\quad(20)$$

Подставляя разложение (18) в интеграл (2), получим

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x+\ldots+x^{2m-1}+x^{2m}}=\sum_{k=1}^{m}\left(B_k\ln\Big(2-(x_k+x_k^*)\Big)+C_k\int_0^1\frac{dx}{x^2-(x_k+x_k^*)x+1}\right).\ (21)$$

Учитывая формулу (14) вычислим интеграл в правой части формулы (21), зная что $0<\frac{2\pi k}{2m+1}<\pi,\quad k=1,2,\ldots,m$

$$\int_0^1\frac{dx}{x^2-(x_k+x_k^*)x+1}=\int_0^1\frac{dx}{x^2-2x\cos\frac{2\pi k}{2m+1}+\cos^2\frac{2\pi k}{2m+1}+\sin^2\frac{2\pi k}{2m+1}}=$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{\left(x-\cos\frac{2\pi k}{2m+1}\right)^2+\sin^2\frac{2\pi k}{2m+1}}=\frac{1}{\sin\frac{2\pi k}{2m+1}}\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\frac{2\pi k}{2m+1}}{\sin\frac{2\pi k}{2m+1}}\Bigg|_{x=0}^{x=1}=$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{2\pi k}{2m+1}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos\frac{2\pi k}{2m+1}}{\sin\frac{2\pi k}{2m+1}}+\operatorname{arctg}\frac{\cos\frac{2\pi k}{2m+1}}{\sin\frac{2\pi k}{2m+1}}\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\dfrac{\pi k}{2m+1}+\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\dfrac{2\pi k}{2m+1}}{\sin\dfrac{2\pi k}{2m+1}}=\frac{\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\dfrac{\pi k}{2m+1}+\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi k}{2m+1}\right)}{\sin\dfrac{2\pi k}{2m+1}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\pi k}{2m+1}+\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi k}{2m+1}\right)}{\sin\dfrac{2\pi k}{2m+1}}=\frac{\pi-\dfrac{2\pi k}{2m+1}}{2\sin\dfrac{2\pi k}{2m+1}}. \qquad (22)$$

Теперь перепишем интеграл (21), воспользовавшись формулами (14) и (22)

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x+\ldots+x^{2m-1}+x^{2m}}=\sum_{k=1}^{m}\left(2B_k\ln\left(2\sin\frac{\pi k}{2m+1}\right)+C_k\frac{\pi-\dfrac{2\pi k}{2m+1}}{2\sin\dfrac{2\pi k}{2m+1}}\right) \qquad (23)$$

и выразим величины B_k и C_k с помощью формул (8), (17), (19), (20)

$$B_k=\frac{(x_k-1)x_k+(x_k^*-1)x_k^*}{2(2m+1)}=\frac{(x_k+x_k^*)^2-(x_k+x_k^*)-2}{2(2m+1)}=$$

$$=\frac{(x_k+x_k^*+1)((x_k+x_k^*)-2)}{2(2m+1)} \qquad (24)$$

$$C_k=\frac{(x_k(x_k-1)-x_k^*(x_k^*-1))(x_k-x_k^*)}{2(2m+1)}=\frac{(x_k+x_k^*-1)(x_k-x_k^*)^2}{2(2m+1)}, \qquad (25)$$

где $k=1,2,\ldots,m$.

Отсюда

$$B_k=-\frac{2\left(2\cos\dfrac{2\pi k}{2m+1}+1\right)\sin^2\dfrac{\pi k}{2m+1}}{(2m+1)},\quad k=1,2,\ldots,m. \qquad (25)$$

$$C_k=-\frac{\left(2\cos\dfrac{2\pi k}{2m+1}-1\right)\sin^2\dfrac{2\pi k}{2m+1}}{2m+1},\quad k=1,2,\ldots,m. \qquad (26)$$

Используя формулы (25) и (26) находим значение интеграла (21)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x+\ldots+x^{2m-1}+x^{2m}} = -\sum_{k=1}^{m} \frac{4\left(2\cos\frac{2\pi k}{2m+1}+1\right)\sin^2\frac{\pi k}{2m+1}}{(2m+1)} \ln\left(2\sin\frac{\pi k}{2m+1}\right) -$$

$$-\sum_{k=1}^{m} \frac{\left(2\cos\frac{2\pi k}{2m+1}-1\right)\sin\frac{2\pi k}{2m+1}}{2m+1} \frac{2(m-k)+1}{2m+1}\pi, \qquad (27)$$

и сумму ряда (1) для $k = 2m+1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{((2m+1)n+1)((2m+1)n+2)} =$$

$$= -\frac{4}{2m+1}\sum_{k=1}^{m}\left(2\cos\frac{2\pi k}{2m+1}+1\right)\sin^2\frac{\pi k}{2m+1}\ln\left(2\sin\frac{\pi k}{2m+1}\right) -$$

$$-\frac{\pi}{(2m+1)^2}\sum_{k=1}^{m}\left(2(m-k)+1\right)\left(2\cos\frac{2\pi k}{2m+1}-1\right)\sin\frac{2\pi k}{2m+1}, \qquad (28)$$

В качестве примера, вычислим суммы ряда (1) для значений $k=7$ и $k=9$. В этом случае имеем, соответственно, $m=3$ и $m=4$. Тогда из (28) получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(7n+1)(7n+2)} = -\frac{4}{7}\sum_{k=1}^{3}\left(2\cos\frac{2\pi k}{7}+1\right)\sin^2\frac{\pi k}{7}\ln\left(2\sin\frac{\pi k}{7}\right) -$$

$$-\frac{\pi}{49}\sum_{k=1}^{3}\left(7-2k\right)\left(2\cos\frac{2\pi k}{7}-1\right)\sin\frac{2\pi k}{7}. \qquad (31)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(9n+1)(9n+2)} = -\sum_{k=1}^{4} \frac{4\left(2\cos\frac{2\pi k}{9}+1\right)\sin^2\frac{\pi k}{9}}{9} \ln\left(2\sin\frac{\pi k}{9}\right) -$$

$$-\frac{\pi}{81}\sum_{k=1}^{4}(9-2k)\left(2\cos\frac{2\pi k}{9}-1\right)\sin\frac{2\pi k}{9}. \qquad (32)$$

Заключение. Рассмотрен ряд Менголи – Броункера нечётного порядка $2m+1, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$. Вычислена его сумма для любого m (см. формулу (28)). Этот ряд и его сумма отсутствует в известных математических справочниках [10, 11, 12, 13].

Целью наших дальнейших исследований будет нахождение суммы ряда Менголе – Броункера чётного порядка $2m$ для любого натурального m.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Терещенко И.В.** О суммировании ряда Менголи - Броункера *k*-го порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/546.

2. **Mengoli Pietro.** Novae quadraturae arithmeticae, seu De additione fractionum. – Bononiae: Ex typographia Iacobi Montij, 1650.

3. **История математики.** Т2. Математика XVII столетия. Под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 301 с.

4. **Cajori F.** A History of Mathematics. 2-nd ed. – L.: Macmillan & Co., Ltd, 1919, p. 173.

5. **Mengoli Pietro.** Geometriae speciosae elementa. – Bononiae, 1659.

6. **Brouncker W.** The squaring of the Hyperbola by an infinite series of rational numbers. Philos. Trans., 1668.

7. **Терещенко И.В.** О суммировании ряда Менголи - Броункера 5-го порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/571.

8. **Терещенко И.В.** О еще одном способе суммирования ряда Менголи - Броункера 5-го порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/607.

9. **Тимофеев А.Ф.** Интегрирование функций. М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. – 433 с.

10. **Смолянский М.Л.** Таблицы неопределённых интегралов. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 108 с.

11. **Двайт Г.Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. Перевод с английского Н.В. Леви. – М. Наука, гл. ред. физ. – мат. лит., 1983. – 176 с.

12. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** Интегралы и ряды. – М. Наука, Uл. ред. физ. – мат. лит., 1981. – 800 с.

13. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, рядов и произведений. 7-е изд. Перевод с английского В.В. Максимова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 1232 с.

REFERENCES

1. **Tereshchenko I.V.** On The Summation of Mengoli – Brouncker's Series of The *k*-th Order. // Scientific works of KubSTU: electron. setevoy politimatich. zhurn. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/546.

2. **Mengoli Pietro.** Novae quadraturae arithmeticae, seu De additione fractionum. – Bononiae: Ex typographia Iacobi Montij, 1650.

3. **Istorija matematiki**. T2. Matematika XVII stoletija Pod red. A.P. Jushkevicha. – Moscow: Nauka, 1970. – 301 s.

4. **Cajori F.** A History of Mathematics. 2-nd ed. – L.: Macmillan & Co., Ltd, 1919, p. 173.

5. **Mengoli Pietro.** Geometriae speciosae elementa. – Bononiae, 1659.

6. **Brouncker W.** The squaring of the Hyperbola by an infinite series of rational numbers. Philos. Trans., 1668.

7. **Tereshchenko I.V.** On The Summation of Mengoli – Brouncker's Series of The 5-th Order. // Scientific works of KubSTU: electron. setevoy politimatich. zhurn. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/571

8. **Tereshhenko I.V.** About one more method of the summation of Mengoli – Brouncker's series of the 5-th order. [Jelektronnyj resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: jelektron. setevoj politematich. zhurn. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/607.

9. **Timofeev A.F.** Integrirovanie funkcij. M.-L.: OGIZ GITTL, 1948. – 433 c.

10. **Smoljanskij M.L.** Tablicy neopredeljonnyh integralov. – M.: GIFML, 1961. – 108 s.

11. **Dwight H.B.** Tables of Integrals and Other Mathematical Data. 4-d ed. - N.Y.: Macmillan, 1961.

12. **Prudnikov A.P., Brychkov Ju.A., Marichev O.I.** Integraly i rjady. – M. Nauka, Gl. red. fiz. – mat. lit., 1981. – 800 s.

13. **Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.** Table of Integrals, Series, and Products. 7-th ed., Elsevier Inc., 2007.

ABOUT THE SUMMATION OF MENGOLI – BROUNCKER'S SERIES OF THE ODD ORDER

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

Mengoli - Brouncker's series of an odd order is considered. A direct method of calculating the definite integral, whose value is equal to the sum of this series, is proposed. It is shown that the sum of the series is expressed in closed form.
Key words: infinite series, Mengoli – Brouncker's series of the *k*-th order, Mengoli – Brouncker's series of an odd order, P. Mengoli, W. Brounker.