УДК 517.521

О СУММИРОВАНИИ РЯДА МЕНГОЛИ - БРОУНКЕРА 8-ГО ПОРЯДКА

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072,Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Рассмотрен ряд Менголи – Броункера 8-го порядка. Предложен прямой метод вычисления определённого интеграла, величина которого равна сумме этого ряда. Показано, что сумма ряда выражается в замкнутом виде.
Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, ряд Менголи – Броункера k-го порядка, ряд Менголи – Броункера 8-го порядка, П. Менголи, У. Броункер.

1. Ряд Менголи – Броункера *k* - го порядка. В предыдущей нашей работе [1] бесконечный положительный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(kn+1)(kn+2)}=\int_0^1\frac{dx}{1+x+x^2+...+x^{k-1}},\quad k=1,2,3,\dots \qquad (1)$$

получил название ряда Менголи - Броункера *k*-го порядка в честь двух почти забытых в наше время математиков. Первый из них, итальянский математик, профессор Болонского университета, Пиетро Менголи (1626 – 1686) в 1650 году в сочинении «Новые арифметические квадратуры или о сложении дробей» нашёл сумму ряда обратных треугольных чисел [2, 3, 4]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{T_{n+1}}=\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+...+\frac{2}{(n+1)\cdot(n+2)}+...=2\,,$$

который по нашей классификации является рядом Менголи – Броункера 1-го порядка с увеличенными в два раза членами.

В другом своём сочинении [3, 5], Менголи нашёл разложение в ряд для $\ln 2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{(-1)^n}{n+1}+...=\ln 2\,.$$

Если сгруппировать в этом ряде слагаемые парами, начиная с первого члена, то получим для логарифма следующий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+2)}+...=\ln 2,$$

который представляет собой сумму ряда (1) для $k=2$. В таком виде ряд был впервые опубликован [3, 6] в 1668 году Уильямом Броункером (1620 – 1684), первым президентом Лондонского королевского общества.

Сумма ряда (1) для значений $k=3,4,5$ и 6 была вычислена нами в предыдущих наших работах [1, 7, 8, 9].

2. Вычисление суммы ряда Менголи – Броункера 8 - го порядка. Из формулы (1) следует, что в случае $k=8$ ряд (1) сходится к сумме

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(8n+1)(8n+2)}=\int_0^1\frac{dx}{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7}. \quad (2)$$

Для вычисления интеграла в формуле (2) разложим на множители многочлен, стоящий в знаменателе

$$x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=\left(x^3+x^2+x+1\right)x^4+\left(x^3+x^2+x+1\right)=$$

$$=\left(x^3+x^2+x+1\right)\left(x^4+1\right)=\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)=\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)=$$

$$=\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^4+2x^2+1-2x^2\right)=\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)\left((x^2+1)^2-2x^2\right)=$$

$$=\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right). \quad (3)$$

Разложим теперь подынтегральную функцию в формуле (2) на простейшие дроби, используя разложение (3)

$$\frac{1}{x^7+x^6+...+x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Fx+G}{x^2-\sqrt{2}x+1}. \quad (4)$$

В этом разложении все неопределённые коэффициенты считаются вещественными. Умножив левую и правую части равенства (4) на двучлен $x+1$ и переходя в этом равенстве к пределу при $x \to -1$, получим

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^7 + x^6 + ... + 1} = \lim_{x \to -1} \left(A + (x+1) \left(\frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Fx+G}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right) \right)$$

или

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{(x^6+x^4+x^2+1)(x+1)} = A.$$

Отсюда

$$A = \frac{1}{4}. \qquad (5)$$

Подставив это значение в равенство (4) получим

$$\frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Fx+G}{x^2-\sqrt{2}x+1} = \frac{1}{(x^6+x^4+x^2+1)(x+1)} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} =$$

$$= \frac{3-x^2-x^4-x^6}{4(x^6+x^4+x^2+1)(x+1)} = \frac{(1-x^2)+(1-x^4)+(1-x^6)}{4(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} =$$

$$= \frac{(1-x^2)+(1-x^2)(1+x^2)+(1-x^2)(1+x^2+x^4)}{4(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} =$$

$$= \frac{(1-x^2)(3+2x^2+x^4)}{4(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} = \frac{(1-x)(3+2x^2+x^4)}{4(x^2+1)(x^4+1)} = \frac{3-3x+2x^2-2x^3+x^4-x^5}{4(x^2+1)(x^4+1)}.$$

Следовательно,

$$\frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Fx+G}{x^2-\sqrt{2}x+1} = \frac{3-3x+2x^2-2x^3+x^4-x^5}{4(x^2+1)(x^4+1)}. \qquad (6)$$

Умножим левую и правую часть равенства (6) на x^2+1

$$Bx + C + \left(x^2 + 1\right)\left(\frac{Dx + E}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{Fx + G}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\right) = \frac{3 - 3x + 2x^2 - 2x^3 + x^4 - x^5}{4(x^4 + 1)}.$$

Полагая в последнем равенстве $x = i$, получим

$$C + Bi = \frac{1 - i}{4}.$$

Откуда, вспоминая, что эти неизвестные коэффициенты вещественны, находим

$$C = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}. \tag{7}$$

Подставив эти найденные значения в формулу (6), приходим к равенству

$$\frac{Dx + E}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{Fx + G}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} = \frac{1 - x}{2(x^4 + 1)}. \tag{8}$$

Так как из формулы (3) следует, что

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1),$$

то, умножая правую и левую части равенства (8) на произведение $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$, приходим к уравнению

$$(Dx + E)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + (Fx + G)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) = \frac{1 - x}{2}. \tag{9}$$

Положим в формуле (9) последовательно $x = 0$, $x = i$ и $x = 1$, тогда получим

$$E + G = \frac{1}{2}, \tag{10}$$

$$D - F + (G - E)i = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{i}{2\sqrt{2}}, \tag{11}$$

$$(D + E)(2 - \sqrt{2}) + (F + G)(2 + \sqrt{2}) = 0. \tag{12}$$

Из равенства (10) и равенства мнимых частей в формуле (11) получим следующую систему линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов E и G

$$\begin{cases} E+G=\dfrac{1}{2}, \\ E-G=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Эта система, очевидно, имеет решение

$$E=\frac{2+\sqrt{2}}{8}, \quad G=\frac{2-\sqrt{2}}{8} \qquad (13)$$

Аналогично из равенства вещественных частей формулы (11), равенства (12) и формул (13) получим другую систему линейных уравнений

$$\begin{cases} D-F=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \\ D(2-\sqrt{2})+F(2+\sqrt{2})=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$D=\frac{\sqrt{2}}{8},\ F=-\frac{\sqrt{2}}{8}. \qquad (14)$$

Подставим значения коэффициентов A, B, C, D, F, E и G (см. формулы (5), (8), (13) и (14)) в разложение (4)

$$\frac{1}{x^7+x^6+...+1}=\frac{1/4}{x+1}+\frac{(1-x)/4}{x^2+1}+\frac{1}{8}\frac{\sqrt{2}x+2+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{8}\frac{-\sqrt{2}x+2-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

и вычислим интеграл (2)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^7+x^6+\ldots+1} = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 \frac{dx}{x+1} - \int_0^1 \frac{(x-1)dx}{x^2+1}\right) +$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\int_0^1 \frac{x+\sqrt{2}+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx - \int_0^1 \frac{x-\sqrt{2}+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx\right). \qquad (15)$$

Отсюда получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} - \int_0^1 \frac{x-1}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} - \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}, \qquad (16)$$

$$\int_0^1 \frac{x+\sqrt{2}+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx + \frac{2+\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} =$$

$$= \frac{\ln(2+\sqrt{2})}{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x\cos\frac{\pi}{4}+1} = \frac{\ln(2+\sqrt{2})}{2} +$$

$$+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dx}{\left(x+\cos\frac{\pi}{4}\right)^2+\sin^2\frac{\pi}{4}} = \frac{\ln(2+\sqrt{2})}{2} + (\sqrt{2}+1)\operatorname{arctg}\frac{x+\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\ln(2+\sqrt{2})}{2} + (\sqrt{2}+1)\left(\operatorname{arctg}\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} - \operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln(2+\sqrt{2})}{2} +$$

$$+(\sqrt{2}+1)\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln(2+\sqrt{2})}{2} + (\sqrt{2}+1)\frac{\pi}{8}. \qquad (17)$$

$$\int_0^1 \frac{x-\sqrt{2}+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx + \frac{2-\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1} =$$

$$=\frac{\ln(2-\sqrt{2})}{2}+\frac{2-\sqrt{2}}{2}\int_0^1\frac{dx}{x^2+2x\cos\frac{3\pi}{4}+1}=\frac{\ln(2-\sqrt{2})}{2}+$$

$$+\frac{2-\sqrt{2}}{2}\int_0^1\frac{dx}{\left(x+\cos\frac{3\pi}{4}\right)^2+\sin^2\frac{3\pi}{4}}=\frac{\ln(2-\sqrt{2})}{2}+(\sqrt{2}-1)\operatorname{arctg}\frac{x+\cos\frac{3\pi}{4}}{\sin\frac{3\pi}{4}}\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{\ln(2-\sqrt{2})}{2}+(\sqrt{2}-1)\left(\operatorname{arctg}\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{\sin\frac{3\pi}{4}}-\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\ln(2-\sqrt{2})}{2}+$$

$$+(\sqrt{2}-1)\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\ln(2-\sqrt{2})}{2}+(\sqrt{2}-1)\frac{3\pi}{8}. \qquad (18)$$

Подставляя найденные интегралы (16), (17) и (18) в формулу (15) и учитывая формулу (2) находим сумму ряда (2)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(8n+1)(8n+2)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{\ln(2+\sqrt{2})}{2}+(\sqrt{2}+1)\frac{\pi}{8}\right)-$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{\ln(2-\sqrt{2})}{2}+(\sqrt{2}-1)\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{\ln 2+\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)}{8}+\frac{\pi\sqrt{2}}{16}. \qquad (19)$$

Заключение. Рассмотрен ряд Менголи – Броункера 8-го порядка. Вычислена его сумма через интеграл (см. формулы (2), и (19)). Этот ряд и его сумма отсутствует в известных математических справочниках [10, 11, 12 и 13].

Целью наших дальнейших исследований будет нахождение суммы ряда Менголе – Броункера нечётного порядка в общем виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Терещенко И.В.** О суммировании ряда Менголи - Броункера *k*-го порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/546.

2. **Mengoli Pietro.** Novae quadraturae arithmeticae, seu De additione fractionum. – Bononiae: Ex typographia Iacobi Montij, 1650.

3. **История математики.** Т2. Математика XVII столетия. Под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 301 с.

4. **Cajori F.** A History of Mathematics. 2-nd ed. – L.: Macmillan & Co., Ltd, 1919, p. 173.

5. **Mengoli Pietro.** Geometriae speciosae elementa. – Bononiae, 1659.

6. **Brouncker W.** The squaring of the Hyperbola by an infinite series of rational numbers. Philos. Trans., 1668.

7. **Терещенко И.В.** О суммировании ряда Менголи - Броункера 5-го порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/571.

8. **Терещенко И.В.** О еще одном способе суммирования ряда Менголи - Броункера 5-го порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/607.

9. **Терещенко И.В.** О суммирования ряда Менголи - Броункера 6-го порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 11. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/608.

10. **Смолянский М.Л.** Таблицы неопределённых интегралов. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 108 с.

11. **Двайт Г.Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. Перевод с английского Н.В. Леви. – М. Наука, гл. ред. физ. – мат. лит., 1983. – 176 с.

12. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** Интегралы и ряды. – М. Наука, Uл. ред. физ. – мат. лит., 1981. – 800 с.

13. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, рядов и произведений. 7-е изд. Перевод с английского В.В. Максимова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 1232 с.

REFERENCES

1. **Tereshchenko I.V.** On The Summation of Mengoli – Brouncker's Series of The 5-th Order. // Scientific works of KubSTU: electron. setevoy politimatich. zhurn. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/546.

2. **Mengoli Pietro.** Novae quadraturae arithmeticae, seu De additione fractionum. – Bononiae: Ex typographia Iacobi Montij, 1650.

3. **Istorija matematiki**. T2. Matematika XVII stoletija Pod red. A.P. Jushkevicha. – Moscow: Nauka, 1970. – 301 s.

4. **Cajori F.** A History of Mathematics. 2-nd ed. – L.: Macmillan, 1919, p. 173.

5. **Mengoli Pietro.** Geometriae speciosae elementa. – Bononiae, 1659.

6. **Brouncker W.** The squaring of the Hyperbola by an infinite series of rational numbers. Philos. Trans., 1668.

7. **Tereshhenko I.V.** O summirovanii rjada Mengoli - Brounkera 5-go porjadka. [Jelektronnyj resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: jelektron. setevoj politematich. zhurn. 2015. № 11. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/571.

8. **Tereshhenko I.V.** O eshhe odnom sposobe summirovanija rjada Mengoli - Brounkera 5-go porjadka. [Jelektronnyj resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: jelektron. setevoj politematich. zhurn. 2015. № 11. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/607.

9. **Tereshhenko I.V.** O summirovanii rjada Mengoli - Brounkera 6-go porjadka.. [Jelektronnyj resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: jelektron. setevoj politematich. zhurn. 2015. № 11. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/608.

10. **Smoljanskij M.L.** Tablicy neopredeljonnyh integralov. – M.: GIFML, 1961.

11. **Dwight H.B.** Tables of Integrals and Other Mathematical Data. 4-d ed. - N.Y.: Macmillan, 1961.

12. **Prudnikov A.P., Brychkov Ju.A., Marichev O.I.** Integraly i rjady. – M. Nauka, Gl. red. fiz. – mat. lit., 1981. – 800 s.

13. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series, and Products. 7-th ed., Elsevier Inc., 2007.

ON THE SUMMATION OF MENGOLI – BROUNCKER'S SERIES OF THE 8-TH ORDER

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

Mengoli - Brouncker's series of the 8-th order is considered. A direct method of calculating the definite integral, whose value is equal to the sum of this series, is proposed. It is shown that the sum of the series is expressed in closed form.
Key words: infinite series, Mengoli – Brouncker's series of the *k*-th order, Mengoli – Brouncker's series of the 8-th order, P. Mengoli, W. Brounker.