УДК 681.325.5

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

И.Н. БУЛАТНИКОВА[1], С.А.ГЕРШУНИН[2]

[1] Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2,
электронная почта: inkras@yandex.ru
[2] Кубанский государственный университет,
350040, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Предлагается и теоретически обосновывается простой алгоритм для вычисления квадратного корня ($y = x^{0,5}$). Рассматриваются расширение алгоритма на другие функции ($y = x^{-1}, y = x^{-0,5}$)

Ключевые слова: быстродействующие целочисленные алгоритмы, разностно-итерационные алгоритмы

Широкое применение микропроцессоров (МП) в различных информационно-управляющих системах локальной автоматизации потребовало особого для МП алгоритмического обеспечения. Нужны скоростные, целочисленные алгоритмы, не содержащие операций умножения и деления.

Одним из типов таких алгоритмов являются разностно-итерационные алгоритмы (РИА).

Нами разработан такой РИА для вычисления квадратного корня из двоичного числа X меньше единицы. Для повышения точности оно предварительно нормализуется путем сдвигов влево, для попадания в интервал $x \epsilon (2^{-2}, 1)$. При этом количество сдвигов *m* (оно должно быть четным) запоминается, затем делится на 2 и принимается за двоичный порядок результата $2^{-m}/_2$.

Мантисса результата определяется по следующему РИА:

$$Z_0 = k,\ Z_i = \begin{cases} Z_{i-1} \cdot (1 + 2^{-i}), \text{если } Z_{i-1} \le Z^*_{i-1}, Z_n \Rightarrow \sqrt{x}; \\ Z_{i-1}, \quad \text{если} \quad Z_{i-1} > Z^*_{i-1}; \end{cases} \quad (1)$$

$$Z^*_0 = x,\ Z^*_i = \begin{cases} Z^*_{i-1}, \quad \text{если } Z_{i-1} \le Z^*_{i-1}, Z^*_n \Rightarrow \sqrt{x}; \\ Z^*_{i-1} \cdot (1 + 2^{-i}),\ \text{если } Z_{i-1} > Z^*_{i-1}; \end{cases} \quad (2)$$

где $i = 1,2,\dots,n$ – номер итерации (n – число разрядов x), k – константа, равная $1/\prod_{i=1}^{n}(1+2^{-i})$ и не зависящая от значения x.

1. Обоснование алгоритма

Доказательство факта равенства $Z_n = Z_n^*$ (в пределах единицы младшего разряда числа x) вытекает из критериев сходимости РИА (“цифра за цифрой”), сформулированных в [1].

Итак, после выполнения n-й итерации РИА имеем

$$Z_n = x_0 \cdot \prod_{i=1}^{n}\left(1+2^{-i}\right)^{q_i} = x \cdot \prod_{i=1}^{n}\left(1+2^{-i}\right)^{\bar{q}_i} = Z_n^*, \qquad (3)$$

где $q_i = \begin{cases} 1, \text{ если } Z_{i-1} \le Z_{n-1}^*, \\ 0, \text{ если } Z_{i-1} > Z_{n-1}^*. \end{cases}$

Константа k подобрана так, чтобы обеспечить извлечение квадратного корня с помощью предложенного РИА

$$x_0 = k = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+2^{-i})}. \qquad (4)$$

После подстановки (4) в (3) и сокращения числителя и знаменателя на $\prod_{i=1}^{n}(1+2^{-i})^{q_i}$, не равное нулю, имеем

$$Z_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+2^{-i})^{\bar{q}_i}} = x \cdot \prod_{i=1}^{n}\left(1+2^{-i}\right)^{\bar{q}_i} = Z_n^*. \qquad (5)$$

Из (5) следует, что

$$x = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+2^{-i})^{2\bar{q}_i}} = Z_n^2. \qquad (6)$$

Докажем это. Из левого равенства (5) имеем

$$1 = Z_n \cdot \prod_{i=1}^{n}(1+2^{-i})^{\bar{q}_i}. \qquad (7)$$

Подставляем единицу множителем к Z_n^* в (5). Имеем

$$x \cdot \prod_{i=1}^{n}\left(1+2^{-i}\right)^{\bar{q}_i} = Z_n^* \cdot Z_n \cdot \prod_{i=1}^{n}(1+2^{-i})^{\bar{q}_i}. \qquad (8)$$

После сокращения левой и правой части (8) на $\prod_{i=1}^{n}(1+2^{-i})^{\bar{q}_i} \ne 0$ получаем $x = Z_n^2$. Отсюда $Z_n = \sqrt{x}$. Окончательный ответ: $\sqrt{X} = 2^{-m/2} \cdot \sqrt{x}$.

2. Расширение возможностей алгоритма

Функциональные возможности РИА могут быть расширены. Исходя из (6) следует, что

$$S_n = {}^1/_{Z_n} = \prod_{i=1}^{n}(1+2^{-i})^{\bar{q}_i} = {}^1/_{\sqrt{x}}. \quad (9)$$

Окончательный итог: $\frac{1}{\sqrt{x}} = 2^{m/2}/\sqrt{x}$.

Таким образом, появляется возможность одновременного вычисления двух величин $\sqrt{x}$ и ${}^1/_{\sqrt{x}}$. Алгоритмически это выражается в дополнении формул (1) и (2) еще одним рекуррентным выражением

$$S_0 = 1,\ S_i = \begin{cases} S_{i-1}, \text{ если } Z_{i-1} \le Z^*_{i-1}, & Z_n \Rightarrow 1/\sqrt{x}; \\ S_{i-1}\cdot(1+2^{-i}), & \text{если } Z_{i-1} > Z^*_{i-1}. \end{cases} \quad (10)$$

Если каждую i-ю итерацию в (10) повторить дважды, то есть при $Z_{i-1} > Z^*_{i-1}$ $S_i = S_{i-1}\cdot(1+2^{-i})\cdot(1+2^{-i})$, то в итоге получим $S_{2n} = {}^1/_x$. Окончательный итог: ${}^1/_x = \frac{2^m}{x}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Байков В.Д., Смолов В.Д. Специализированные процессы: итерационные алгоритмы и структуры/ М.: Радио и связь, 1985.-288 с.

REFERENCES

1.Bajkov V.D., Smolov V.D. Specializirovannye process: iteracionnye algoritmy I struktury. (Specialized processes: iterative algorithms and patterns) /M.:Rradio I svyaz. 1985.-288p.

INTEGER ALGORITHM TO COMPUTE OF THE SQUARE ROOT

I.N. BULATNIKOVA[1], S.A. GERSHUNIN[2]

[1]Kuban state technological university,
2, Moskovskaya str., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: inkras@yandex.ru.
[2]Kuban state university,
149, Stavropolskaya str., Krasnodar, Russian Federation, 350040

Proposed and theoretically proved simple algorithm to compute of a square root $(y = x^{0,5})$.. Discusses the extension of the algorithm to other functions $(y = x^{-1}, y = x^{-0,5})$

Key words: fast integer algorithms, differential-iterative algorithms.