УДК 517.521

О ЕЩЁ ОДНОМ СПОСОБЕ СУММИРОВАНИИ РЯДА МЕНГОЛИ - БРОУНКЕРА 5-ГО ПОРЯДКА

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Рассмотрен ряд Менголи – Броункера 5-го порядка. Предложен прямой метод вычисления определённого интеграла, величина которого равна сумме этого ряда. Показано, что сумма ряда выражается через квадратичные иррациональности.

Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, ряд Менголи – Броункера *k*-го порядка, ряд Менголи – Броункера 5-го порядка, П. Менголи, У. Броункер.

1. Ряд Менголи – Броункера k-го порядка. В нашей работе [1] бесконечный положительный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(kn+1)(kn+2)}=\int_0^1\frac{dx}{1+x+x^2+...+x^{k-1}},\quad k=1,2,3,.... \quad (1)$$

получил название ряда Менголи - Броункера k-го порядка в честь двух почти забытых в наше время математиков. Первый из них, итальянский математик, профессор Болонского университета, Пиетро Менголи (1626 – 1686) в 1650 году нашёл сумму ряда обратных треугольных чисел [2, 3, 4]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{T_{n+1}}=\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+...+\frac{2}{(n+1)\cdot(n+2)}+...=2,$$

который по нашей классификации является рядом Менголи – Броункера 1-го порядка с увеличенными в два раза членами.

В другом своём сочинении [3, 5], Менголи нашёл разложение в ряд для $\ln 2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{(-1)^n}{n+1}+...=\ln 2.$$

Если сгруппировать в этом ряде слагаемые парами, начиная с первого члена, то получим для логарифма следующий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+2)}+...=\ln 2\,.$$

Он представляет собой сумму ряда (1) для значения $k=2$. В таком виде ряд был впервые опубликован в 1668 году Уильямом Броункером (1620 – 1684), первым президентом Лондонского королевского общества [3, 6].

Из формулы (1) следует, что в случае $k=5$ ряд (1) сходится к сумме

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)(5n+2)}=\int_0^1\frac{dx}{1+x+x^2+x^3+x^4}\,. \tag{2}$$

Интеграл в правой части был вычислен нами в предыдущей работе [7] через значения тригонометрической функции

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)(5n+2)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\ln(2\cos\varphi)+\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\varphi-\frac{\cos 3\varphi}{\sin 3\varphi}3\varphi\right)\right),\quad \varphi=\frac{\pi}{5}, \tag{3}$$

и через радикалы

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)(5n+2)}=\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{\pi\sqrt{2}\sqrt[4]{5}}{200}\left(\left(\sqrt{5}+1\right)^{\frac{3}{2}}+3\left(\sqrt{5}-1\right)^{\frac{3}{2}}\right). \tag{4}$$

Этот ряд и его сумма, а так же интеграл (2) отсутствует в известных математических справочниках [8, 9, 10, 11].

2. Вычисление суммы ряда Менголи – Броункера 5 - го порядка. Дадим другое решение этой задачи, отличное от изложенного в работе [7]. Найдём корни многочлена, стоящего в знаменателе в формуле (2). Для этого решим уравнение

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0\,, \tag{5}$$

Очевидно, что $x=1$ не является корнем этого уравнения. Умножая его на разность $x-1$, получим равносильное уравнение

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0, \quad x\neq 1,$$

или

$$x^5-1=0, \quad x\neq 1.$$

Корни этого уравнения являются комплексными корнями пятой степени из единицы

$$x_k=\sqrt[5]{1}_k=e^{i\frac{2\pi k}{5}}, \quad k=1,2,3,4. \qquad (6)$$

Следовательно, справедливо разложение

$$x^4+x^3+x^2+x+1=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4). \qquad (7)$$

Тогда подынтегральную функцию в интеграле (2) можно разложить на простейшие дроби

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4}=\frac{x-1}{x^5-1}=\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{k=1}^{4}\frac{A_k}{x-x_k}, \quad x\neq 1. \qquad (8)$$

Умножив левую и правую часть этого равенства для каждого значения $m=1,2,3,4$ на разность $x-x_m$ и, переходя к пределу при $x\to x_m$, получим

$$\lim_{x\to x_m}\frac{P(x)}{\dfrac{Q(x)-Q(x_m)}{x-x_m}}=\frac{P(x_m)}{Q'(x_m)}=\frac{x_m-1}{5{x_m}^4}=A_m+\lim_{x\to x_m}\left(x-x_m\right)\sum_{k=1,k\neq m}^{4}\frac{A_k}{x-x_k}, \quad x\neq 1.$$

Так как $\lim\limits_{x\to x_m}\left(x-x_m\right)\sum\limits_{k=1,k\neq m}^{4}\dfrac{A_k}{x-x_k}=0$, то отсюда находим все коэффициенты разложения (8)

$$A_k=\frac{x_k-1}{5{x_k}^4}=\frac{(x_k-1)x_k}{5{x_k}^5}=\frac{(x_k-1)x_k}{5}, \quad k=1,2,3,4. \qquad (9)$$

Перейдём от корней (6) к их комплексно сопряженным значениям

$$x_k^* = e^{-i\frac{2\pi k}{5}} = e^{i2\pi} e^{-i\frac{2\pi k}{5}} = e^{i\frac{2\pi(5-k)}{5}} = x_{5-k}, \quad k = 1, 2, 3, 4\,. \tag{10}$$

Из формулы (10) следует, что эти корни образуют комплексно сопряжённые пары

$$x_1^* = x_{5-1} = x_4, \quad x_2^* = x_{5-2} = x_3, \tag{11}$$

и удовлетворяют соотношениям

$$x_k + x_k^* = e^{i\frac{2\pi k}{5}} + e^{-i\frac{2\pi k}{5}} = 2\cos\frac{2\pi k}{5}, \tag{12}$$

$$x_k x_k^* = 1, \quad x_k = x_1^k, \quad k = 1, 2, 3, 4 \tag{13}$$

Используя формулу (11), перепишем формулу (7), то есть разложение многочлена $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ на множители, следующим образом

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x - x_1)(x - x_1^*)(x - x_2)(x - x_2^*)\,. \tag{14}$$

Заметим, что из формул (11) следует, что коэффициенты, задаваемые формулой (9), образуют комплексно сопряжённые пары

$$A_1^* = \frac{(x_1^* - 1)x_1^*}{5} = \frac{(x_4 - 1)x_4}{5} = A_4, \quad A_2^* = \frac{(x_2^* - 1)x_2^*}{5} = \frac{(x_3 - 1)x_3}{5} = A_3\,. \tag{15}$$

Теперь мы можем переписать разложение (8) следующим образом

$$\frac{1}{1 + x + x^2 + x^3 + x^4} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_1^*}{x - x_1^*} + \frac{A_2}{x - x_2} + \frac{A_2^*}{x - x_2^*}$$

или

$$\frac{1}{1 + x + x^2 + x^3 + x^4} = \frac{A_1(x - x_1^*) + A_1^*(x - x_1)}{(x - x_1)(x - x_1^*)} + \frac{A_2(x - x_2^*) + A_2^*(x - x_2)}{(x - x_2)(x - x_2^*)}\,.$$

Так как согласно формулам (13) $x_1 x_1^* = x_2 x_2^* = 1$, то отсюда получаем

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4} = \frac{(A_1+A_1^*)x-(A_1x_1^*+A_1^*x_1)}{x^2-(x_1+x_1^*)x+1} + \frac{A_2(x-x_2^*)+A_2^*(x-x_2)}{(x-x_2)(x-x_2^*)}$$

или

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4} = \sum_{k=1}^{2}(A_k+A_k^*)\frac{x-\dfrac{(A_kx_k^*+A_k^*x_k)}{(A_k+A_k^*)}}{x^2-(x_k+x_k^*)x+1}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4} = \sum_{k=1}^{2}(A_k+A_k^*)\frac{x-\dfrac{x_k+x_k^*}{2}+\dfrac{x_k+x_k^*}{2}-\dfrac{(A_kx_k^*+A_k^*x_k)}{(A_k+A_k^*)}}{x^2-(x_k+x_k^*)x+1}.$$

Из последнего равенства получаем

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4} = \sum_{k=1}^{2}\frac{A_k+A_k^*}{2}\frac{2x-x_k-x_k^*}{x^2-(x_k+x_k^*)x+1} + \sum_{k=1}^{2}\frac{\dfrac{A_k-A_k^*}{2}(x_k-x_k^*)}{x^2-(x_k+x_k^*)x+1}$$

или

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4} = \sum_{k=1}^{2}B_k\frac{2x-x_k-x_k^*}{x^2-(x_k+x_k^*)x+1} + \sum_{k=1}^{2}\frac{C_k}{x^2-(x_k+x_k^*)x+1}, \quad (16)$$

где

$$B_k = \frac{A_k+A_k^*}{2}, \quad k=1,2, \quad (17)$$

$$C_k = \frac{(A_k-A_k^*)(x_k-x_k^*)}{2}, \quad k=1,2. \quad (18)$$

Подставляя разложение (16) в интеграл (2), получим

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x+x^2+x^3+x^4} = \sum_{k=1}^{2}B_k\ln\left(2-(x_k+x_k^*)\right)++\sum_{k=1}^{2}C_k\int_0^1\frac{dx}{x^2-(x_k+x_k^*)x+1}. \quad (19)$$

Учитывая формулу (12) вычислим интеграл в правой части формулы (19), зная что $0<\frac{2\pi k}{5}<\pi, \quad k=1,2$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-(x_k+x_k^*)x+1}=\int_0^1 \frac{dx}{x^2-2x\cos\frac{2\pi k}{5}+\cos^2\frac{2\pi k}{5}+\sin^2\frac{2\pi k}{5}}=$$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{\left(x-\cos\frac{2\pi k}{5}\right)^2+\sin^2\frac{2\pi k}{5}}=\frac{1}{\sin\frac{2\pi k}{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\frac{2\pi k}{5}}{\sin\frac{2\pi k}{5}}\Bigg|_{x=0}^{x=1}=$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{2\pi k}{5}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos\frac{2\pi k}{5}}{\sin\frac{2\pi k}{5}}+\operatorname{arctg}\frac{\cos\frac{2\pi k}{5}}{\sin\frac{2\pi k}{5}}\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{\pi k}{5}+\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\frac{2\pi k}{5}}{\sin\frac{2\pi k}{5}}=\frac{\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{\pi k}{5}+\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi k}{5}\right)}{\sin\frac{2\pi k}{5}}=$$

$$=\frac{\frac{\pi k}{5}+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi k}{5}\right)}{\sin\frac{2\pi k}{5}}=\frac{\pi-\frac{2\pi k}{5}}{2\sin\left(\pi-\frac{2\pi k}{5}\right)}. \tag{20}$$

Теперь перепишем интеграл (19), воспользовавшись формулой (20)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2+x^3+x^4}=\sum_{k=1}^{2}B_k\ln\left(2-(x_k+x_k^*)\right)+\sum_{k=1}^{2}C_k\frac{\pi-\frac{2\pi k}{5}}{2\sin\left(\pi-\frac{2\pi k}{5}\right)} \tag{21}$$

и выразим величины B_k и C_k с помощью формул (15), (17), (18) через сумму $x_k+x_k^*$

$$B_k = \frac{(x_k - 1)x_k + (x_k^* - 1)x_k^*}{10} = \frac{(x_k + x_k^*)^2 - (x_k + x_k^*) - 2}{10}, \tag{22}$$

$$C_k = \frac{(x_k(x_k - 1) - x_k^*(x_k^* - 1))(x_k - x_k^*)}{10} = \frac{(x_k + x_k^* - 1)((x_k + x_k^*)^2 - 4)}{10}, \tag{23}$$

где $k = 1, 2$.

Из формул (9), (12) и (13) имеем

$$2 - (x_k + x_k^*) = 2 - 2\cos\frac{2\pi k}{5} = 4\sin^2\frac{\pi k}{5}, \quad k = 1, 2, \tag{24}$$

$$B_k = \frac{2\cos^2\frac{2\pi k}{5} - \cos\frac{2\pi k}{5} - 1}{5}, \quad k = 1, 2. \tag{25}$$

$$C_k = \frac{2\left(2\cos\frac{2\pi k}{5} - 1\right)\left(\cos^2\frac{2\pi k}{5} - 1\right)}{5}, \quad k = 1, 2. \tag{26}$$

Используя формулы (24), (25) и (26) находим значение интеграла (21)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x + x^2 + x^3 + x^4} = \sum_{k=1}^{2} \frac{2\cos^2\frac{2\pi k}{5} - \cos\frac{2\pi k}{5} - 1}{5} 2\ln\left(2\sin\frac{\pi k}{5}\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{2} \frac{\left(2\cos\frac{2\pi k}{5} - 1\right)\left(\cos^2\frac{2\pi k}{5} - 1\right)}{5} \frac{\pi - \frac{2\pi k}{5}}{\sin\left(\pi - \frac{2\pi k}{5}\right)}. \tag{27}$$

Для вычисления значения

$$t = \frac{x_1 + x_1^*}{2} = \cos\frac{2\pi}{5} > 0 \tag{28}$$

воспользуемся тем, что x_1 корень уравнения (5)

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0,$$

и для него выполнены соотношения (12) – (13). Тогда имеем

$$0=x_1^{\ 4}+x_1^{\ 3}+x_1^{\ 2}+x_1+1=x_1^*+x_2^*+x_2+x_1+1=4t^2+2t-1.$$

Из квадратного уравнения

$$4t^2+2t-1=0$$

находим положительный корень квадратного уравнения t

$$t=\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}. \tag{29}$$

Отсюда получаем

$$\cos\frac{\pi}{5}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{2\pi}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{8}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{16}}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \tag{30}$$

$$\sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}}=\sqrt{1-\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{16}}=\sqrt{1-\frac{3+\sqrt{5}}{8}}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \tag{31}$$

$$\sin\frac{2\pi}{5}=2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}=2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{16}}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \tag{32}$$

$$\sin\frac{3\pi}{5}=\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=\sin\frac{2\pi}{5},\ \cos\frac{4\pi}{5}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=-\cos\frac{\pi}{5}, \tag{33}$$

$$\cos\frac{4\pi}{5}=2\cos^2\frac{2\pi}{5}-1=2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2-1=\frac{3-\sqrt{5}}{4}-1=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}. \tag{34}$$

Теперь, используя равенства (29) – (34) и подставляя значения тригонометрических функций в формулы (25) и (26), найдём величины B_1, B_2, C_1, C_2

$$B_1 = \frac{2\cos^2\frac{2\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} - 1}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{10} = -\frac{1}{2\sqrt{5}}, \tag{35}$$

$$B_2 = \frac{2\cos^2\frac{4\pi}{5} - \cos\frac{4\pi}{5} - 1}{5} = \frac{\sqrt{5}}{10} = \frac{1}{2\sqrt{5}}, \tag{36}$$

$$C_1 = \frac{2\left(2\cos\frac{2\pi}{5} - 1\right)\left(\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1\right)}{5} = \frac{5-\sqrt{5}}{20} = \frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}}, \tag{37}$$

$$C_2 = \frac{2\left(2\cos\frac{4\pi}{5} - 1\right)\left(\cos^2\frac{4\pi}{5} - 1\right)}{5} = \frac{5+\sqrt{5}}{20} = \frac{\sqrt{5}+1}{4\sqrt{5}}. \tag{38}$$

Зная значения этих констант, вычислим интеграл (21) или (27)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2+x^3+x^4} = \sum_{k=1}^{2} B_k \ln\left(4\sin^2\frac{\pi k}{5}\right) + \sum_{k=1}^{2} C_k \frac{\pi - \frac{2\pi k}{5}}{2\sin\left(\pi - \frac{2\pi k}{5}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \frac{\pi\sqrt{2}\sqrt[4]{5}}{200}\left(\left(\sqrt{5}+1\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\sqrt{5}-1\right)^{\frac{3}{2}} 3\right). \tag{39}$$

Впрочем, ответ можно получить через значения тригонометрических функций, положив $\varphi = \frac{\pi}{5}$. Тогда

$$\cos\varphi = -\cos 4\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \quad \cos 2\varphi = -\cos 3\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \tag{40}$$

$$\sin\varphi = \sin 4\varphi = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \quad \sin 2\varphi = \sin 3\varphi = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \tag{41}$$

Теперь из формулы (21) следует [7]

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2+x^3+x^4} = \frac{\ln\left(2-2\cos 4\varphi\right)-\ln\left(2-2\cos 2\varphi\right)}{2\sqrt{5}} +$$

$$+C_2\frac{\varphi}{2\sin\varphi}+C_1\frac{3\varphi}{2\sin 3\varphi} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\sqrt{\frac{1-\cos 4\varphi}{1-\cos 2\varphi}}+\frac{\cos\varphi}{2\sqrt{5}\sin\varphi}\varphi+\frac{\cos 2\varphi}{2\sqrt{5}\sin 3\varphi}3\varphi =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\ln(2\cos\varphi)+\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\varphi-\frac{\cos 3\varphi}{\sin 3\varphi}3\varphi\right)\right), \quad \varphi=\frac{\pi}{5}. \tag{42}$$

Заключение. Рассмотрен ряд Менголи – Броункера 5-го порядка. Вычислена его сумма через интеграл (см. формулы (2), (39) и (42)) и найдено её значение методом, отличным от метода от нашей работы [7]. Этот ряд и его сумма отсутствует в известных математических справочниках [8, 9, 10, 11].

Целью наших дальнейших исследований будет нахождение суммы ряда Менголе – Броункера 6-го порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Терещенко И.В.** О суммировании ряда Менголи - Броункера *k*-го порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/546.

2. **Mengoli Pietro.** Novae quadraturae arithmeticae, seu De additione fractionum. – Bononiae: Ex typographia Iacobi Montij, 1650.

3. **История математики.** Т2. Математика XVII столетия. Под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 301 с.

4. **Cajori F.** A History of Mathematics. 2-nd ed. – L.: Macmillan & Co., Ltd, 1919, p. 173.

5. **Mengoli Pietro.** Geometriae speciosae elementa. – Bononiae, 1659.

6. **Brouncker W.** The squaring of the Hyperbola by an infinite series of rational numbers. Philos. Trans., 1668.

7. **Терещенко И.В.** О суммировании ряда Менголи - Броункера 5-го порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/571.

8. **Смолянский М.Л.** Таблицы неопределённых интегралов. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 108 с.

9. **Двайт Г.Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. Перевод с английского Н.В. Леви. – М.: Наука, гл. ред. физ. – мат. лит., 1983. – 176 с.

10. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** Интегралы и ряды. – М. Наука, Uл. ред. физ. – мат. лит., 1981. – 800 с.

11. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, рядов и произведений. 7-е изд. Перевод с английского В.В. Максимова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 1232 с.

REFERENCES

1. **Tereshchenko I.V.** On The Summation of Mengoli – Brouncker’s Series of The *k*-th Order. // Scientific works of KubSTU: electron. setevoy politimatich. zhurn. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/546.

2. **Mengoli Pietro.** Novae quadraturae arithmeticae, seu De additione fractionum. – Bononiae: Ex typographia Iacobi Montij, 1650.

3. **Istorija matematiki**. T2. Matematika XVII stoletija Pod red. A.P. Jushkevicha. – Moscow: Nauka, 1970. – 301 s.

4. **Cajori F.** A History of Mathematics. 2-nd ed. – L.: Macmillan & Co., Ltd, 1919, p. 173.

5. **Mengoli Pietro.** Geometriae speciosae elementa. – Bononiae, 1659.

6. **Brouncker W.** The squaring of the Hyperbola by an infinite series of rational numbers. Philos. Trans., 1668.

7. **Tereshchenko I.V.** On The Summation of Mengoli – Brouncker's Series of The 5-th Order. // Scientific works of KubSTU: electron. setevoy politimatich. zhurn. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/571

8. **Smoljanskij M.L.** Tablicy neopredeljonnyh integralov. – M.: GIFML, 1961. – 108 s.

9. **Dwight H.B.** Tables of Integrals and Other Mathematical Data. 4-d ed. - N.Y.: Macmillan, 1961.

10. **Prudnikov A.P., Brychkov Ju.A., Marichev O.I.** Integraly i rjady. – M. Nauka, Gl. red. fiz. – mat. lit., 1981. – 800 s.

11. **Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.** Table of Integrals, Series, and Products. 7-th ed., Elsevier Inc., 2007.

ONCE MORE ABOUT THE METHOD OF SUMMATION OF MENGOLI – BROUNCKER'S SERIES OF THE 5-TH ORDER

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

Mengoli - Brouncker's series of the 5-th order is considered. A direct method of calculating the definite integral, whose value is equal to the sum of this series, is proposed. It is shown that the sum of the series is expressed in terms of quadratic irrationality. It is shown that the sum of the series is expressed in terms of quadratic irrationality.

Key words: infinite series, Mengoli – Brouncker's series of the *k*-th order, Mengoli – Brouncker's series of the 5-th order, P. Mengoli, W. Brounker.