УДК 517.521

О СУММИРОВАНИИ РЯДА МЕНГОЛИ - БРОУНКЕРА 5-ГО ПОРЯДКА

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Рассмотрен ряд Менголи – Броункера 5-го порядка. Предложен прямой метод вычисления определённого интеграла, величина которого равна сумме этого ряда. Показано, что сумма ряда выражается через квадратичные иррациональности.
Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, ряд Менголи – Броункера *k*-го порядка, ряд Менголи – Броункера 5-го порядка, П. Менголи, У. Броункер.

1. Ряд Менголи – Броункера *k* - го порядка. В предыдущей нашей работе [1] бесконечный положительный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(kn+1)(kn+2)}=\int_0^1\frac{dx}{1+x+x^2+...+x^{k-1}},\quad k=1,2,3,... . \quad (1)$$

получил название ряда Менголи - Броункера *k*-го порядка в честь двух почти забытых в наше время математиков. Первый из них, итальянский математик, профессор Болонского университета, Пиетро Менголи (1626 – 1686) в 1650 году в сочинении «Новые арифметические квадратуры или о сложении дробей» нашёл сумму ряда обратных треугольных чисел [2, 3, 4]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{T_{n+1}}=\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+...+\frac{2}{(n+1)\cdot(n+2)}+...=2,$$

который по нашей классификации является рядом Менголи – Броункера 1-го порядка с увеличенными в два раза членами.

В другом своём сочинении [3, 5], Менголи нашёл разложение в ряд для $\ln 2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{(-1)^n}{n+1}+...=\ln 2.$$

Если сгруппировать в этом ряде слагаемые парами, начиная с первого члена, то получим для логарифма следующий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+2)}+\ldots=\ln 2,$$

который представляет собой сумму ряда (1) для $k=2$. В таком виде ряд был впервые опубликован [3, 6] в 1668 году Уильямом Броункером (1620 – 1684), первым президентом Лондонского королевского общества.

2. Вычисление суммы ряда Менголи – Броункера 5 - го порядка. Из формулы (1) следует, что в случае $k=5$ ряд (1) сходится к сумме

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)(5n+2)}=\int_0^1\frac{dx}{1+x+x^2+x^3+x^4}. \qquad (2)$$

Для вычисления интеграла в формуле (2) разложим на множители многочлен, стоящий в знаменателе, при условии, что $x\neq 0$

$$x^4+x^3+x^2+x+1=x^2\left(x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left(\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right)=$$

$$=x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right)=x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{5}{4}\right)=$$

$$=x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)=x^2\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Отсюда получаем искомое разложение, справедливое уже для любого вещественного x

$$x^4+x^3+x^2+x+1=\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right). \qquad (3)$$

Разложим теперь подынтегральную функцию в формуле (2) на простейшие дроби, используя разложение (3)

$$\frac{1}{x^4+x^3+x^2+x+1}=\frac{Ax+B}{x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1}. \qquad (4)$$

Приведём сумму двух дробей в правой части равенства (4) к общему знаменателю

$$\frac{1}{x^4+x^3+x^2+x+1}=\frac{(Ax+B)\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)+(Cx+D)\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)}{\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)}.$$

Приравнивая числители, приходим к тождеству

$$1=(A+C)x^3+\left(B+D+\frac{1-\sqrt{5}}{2}A+\frac{1+\sqrt{5}}{2}C\right)x^2+$$

$$\left(A+C+B\frac{1-\sqrt{5}}{2}+D\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x+B+D,$$

из которого получаем систему линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов

$$\begin{cases} A+C=0, \\ B+D+\dfrac{A+C}{2}+\dfrac{C-A}{2}\sqrt{5}=0, \\ A+C+\dfrac{B+D}{2}+\dfrac{D-B}{2}\sqrt{5}=0, \\ B+D=1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим неизвестные коэффициенты

$$A=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad B=\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}},\quad C=-\frac{1}{\sqrt{5}},\quad D=\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}.$$

Подставим их в разложение (4)

$$\frac{1}{x^4+x^3+x^2+x+1}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\frac{2x+\sqrt{5}+1}{x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1}-\frac{1}{2\sqrt{5}}\frac{2x+1-\sqrt{5}}{x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1}$$

и преобразуем интеграл (2)

$$\int_0^1\frac{dx}{x^4+x^3+x^2+x+1}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\int_0^1\frac{2x+\sqrt{5}+1}{x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1}dx-\frac{1}{2\sqrt{5}}\int_0^1\frac{2x+1-\sqrt{5}}{x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{5}}\int_0^1\frac{2x+\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1}dx+\frac{\sqrt{5}+1}{4\sqrt{5}}\int_0^1\frac{dx}{x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1}-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{5}}\int_0^1\frac{2x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{x^2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}x+1}dx+\frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}}\int_0^1\frac{dx}{x^2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}x+1}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)+\frac{\sqrt{5}+1}{4\sqrt{5}}\int_0^1\frac{dx}{x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1}+\frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}}\int_0^1\frac{dx}{x^2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}x+1}=$$

$$=\frac{\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{\sqrt{5}}+\int_0^1\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{4\sqrt{5}}dx}{\left(x+\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2+\frac{5-\sqrt{5}}{8}}+\int_0^1\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}}dx}{\left(x-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2+\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.\qquad(5)$$

Для упрощения дальнейших вычислений, положим

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{4},\ 0<\varphi<\frac{\pi}{4}. \tag{6}$$

Тогда

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4},\quad \cos 4\varphi = 2\cos^2 2\varphi - 1 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \tag{7}$$

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},\quad \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \tag{8}$$

$$\sin 4\varphi = 2\sin 2\varphi\cos 2\varphi = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}. \tag{9}$$

$$\cos 3\varphi = \cos\varphi\cos 2\varphi - \sin\varphi\sin 2\varphi = -\frac{\sqrt{5}-1}{4} \tag{10}$$

$$\sin 3\varphi = \sin\varphi\cos 2\varphi + \cos\varphi\sin 2\varphi = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \tag{11}$$

Отсюда следует, что

$$\cos\varphi = -\cos 4\varphi,\quad \sin\varphi = \sin 4\varphi,\quad \sin 5\varphi = \sin\varphi\cos 4\varphi + \cos\varphi\sin 4\varphi = 0.$$

и

$$\varphi = \frac{\pi}{5},\quad \cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}. \tag{12}$$

Подставляя формулы (6) – (12) в формулу (5), находим интеграл (2)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^4+x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\cos\varphi}{\sqrt{5}}\int_0^1 \frac{dx}{\left(x+\cos\varphi\right)^2+\sin^2\varphi} +$$

$$-\frac{\cos 3\varphi}{\sqrt{5}}\int_0^1 \frac{dx}{\left(x+\cos 3\varphi\right)^2+\sin^2 3\varphi} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2} +$$

$$+\frac{\sqrt{5}+1}{4\sqrt{5}}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}-\operatorname{arctg}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}}{\sin\varphi}+\frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1+\cos3\varphi}{\sin3\varphi}-\operatorname{arctg}\frac{\cos3\varphi}{\sin3\varphi}}{\sin3\varphi}=$$

$$=\frac{\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}+1}{4\sqrt{5}}\frac{\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}-\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\varphi}{\sin\varphi}+\frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}}\frac{\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\frac{3\varphi}{2}-\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}3\varphi}{\sin3\varphi}=$$

$$=\frac{\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}+1}{4\sqrt{5}}\frac{\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)-\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{\sin\varphi}+$$

$$+\frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}}\frac{\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\varphi}{2}\right)-\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-3\varphi\right)}{\sin3\varphi}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{8\sqrt{5}\sin\varphi}\varphi+\frac{\sqrt{5}-1}{8\sqrt{5}\sin3\varphi}3\varphi=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{\pi\sqrt{2}\sqrt[4]{5}}{200}\left(\left(\sqrt{5}+1\right)^{\frac{3}{2}}+3\left(\sqrt{5}-1\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$

Итак, сумма ряда (2) равна

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)(5n+2)}=\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{\pi\sqrt{2}\sqrt[4]{5}}{200}\left(\left(\sqrt{5}+1\right)^{\frac{3}{2}}+3\left(\sqrt{5}-1\right)^{\frac{3}{2}}\right). \quad (13)$$

Впрочем, её можно записать в тригонометрической форме

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)(5n+2)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\ln(2\cos\varphi)+\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\varphi-\frac{\cos3\varphi}{\sin3\varphi}3\varphi\right)\right),\quad \varphi=\frac{\pi}{5}. \quad (14)$$

Заключение. Рассмотрен ряд Менголи – Броункера 5-го порядка. Вычислена его сумма через интеграл (см. формулы (2), (13) и (14)). Этот ряд и его сумма отсутствует в известных математических справочниках [7, 8, 9].

Целью наших дальнейших исследований будет нахождение суммы ряда Менголе – Броункера 5-го порядка другим метод.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Терещенко И.В.** О суммировании ряда Менголи - Броункера *k*-го порядка. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/546.
2. **Mengoli Pietro.** Novae quadraturae arithmeticae, seu De additione fractionum. – Bononiae: Ex typographia Iacobi Montij, 1650.
3. **История математики.** Т2. Математика XVII столетия. Под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 301 с.
4. **Cajori F.** A History of Mathematics. 2-nd ed. – L.: Macmillan & Co., Ltd, 1919, p. 173.
5. **Mengoli Pietro.** Geometriae speciosae elementa. – Bononiae, 1659.
6. **Brouncker W.** The squaring of the Hyperbola by an infinite series of rational numbers. Philos. Trans., 1668.
7. **Двайт Г.Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. Перевод с английского Н.В. Леви. – М. Наука, гл. ред. физ. – мат. лит., 1983. – 176 с.
8. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** Интегралы и ряды. – М. Наука, Uл. ред. физ. – мат. лит., 1981. – 800 с.
9. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, рядов и произведений. 7-е изд. Перевод с английского В.В. Максимова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 1232 с.

REFERENCES

1. **Tereshchenko I.V.** On The Summation of Mengoli – Brouncker's Series of The 5-th Order. // Scientific works of KubSTU: electron. setevoy politimatich. zhurn. 2015. № 10. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/546.
2. **Mengoli Pietro.** Novae quadraturae arithmeticae, seu De additione fractionum. – Bononiae: Ex typographia Iacobi Montij, 1650.

3. **Istorija matematiki**. T2. Matematika XVII stoletija Pod red. A.P. Jushkevicha. – Moscow: Nauka, 1970. – 301 s.

4. **Cajori F.** A History of Mathematics. 2-nd ed. – L.: Macmillan & Co., Ltd, 1919, p. 173.

5. **Mengoli Pietro.** Geometriae speciosae elementa. – Bononiae, 1659.

6. **Brouncker W.** The squaring of the Hyperbola by an infinite series of rational numbers. Philos. Trans., 1668.

7. **Dwight H.B.** Tables of Integrals and Other Mathematical Data. 4-d ed. - N.Y.: Macmillan, 1961.

8. **Prudnikov A.P., Brychkov Ju.A., Marichev O.I.** Integraly i rjady. – M. Nauka, Gl. red. fiz. – mat. lit., 1981. – 800 s.

9. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series, and Products. 7-th ed., Elsevier Inc., 2007.517.521

ON THE SUMMATION OF MENGOLI – BROUNCKER'S SERIES OF THE 5-TH ORDER

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

Mengoli - Brouncker's series of the 5-th order is considered. A direct method of calculating the definite integral, whose value is equal to the sum of this series, is proposed. It is shown that the sum of the series is expressed in terms of quadratic irrationality.

Key words: infinite series, Mengoli – Brouncker's series of the *k*-th order, Mengoli – Brouncker's series of the 5-th order, P. Mengoli, W. Brounker.