УДК 517.521

О СУММИРОВАНИИ РЯДА МЕНГОЛИ - БРОУНКЕРА К-ГО ПОРЯДКА

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Предложено семейство рядов, обобщающих ряд обратных треугольных чисел (ряд Менголи) и ряд Броункера, зависящее от одного натурального параметра. Для каждого значения параметра вычислена сумма такого ряда через интеграл. Для простейших случаев (значений параметра 1, 2, 3 и 4) интеграл вычислен в замкнутой форме.
Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, телескопический ряд, ряд обратных треугольных чисел, ряд Менголи, ряд Броункера, П. Менголи, У. Броункер.

1. Суммы обратных треугольных чисел. Треугольным числом T_n называется сумма первых *n* натуральных чисел

$$T_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

В 1650 году в сочинении «Новые арифметические квадратуры или о сложении дробей» [1, 2] итальянский математик, профессор Болонского университета, Пиетро Менголи (1626 – 1686) нашёл сумму ряда обратных треугольных чисел [3]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{T_{n+1}} = \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{2}{(n+1) \cdot (n+2)} + \ldots = 2,$$

опередив на десятилетия Гюйгенса, Лейбница и Якова Бернулли. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} + \ldots = 1, \tag{1}$$

с членами вдвое меньшими обратных треугольных чисел, получил название телескопического ряда или ряда Менголи.

В другом своём сочинении [2, 4], Менголи нашёл разложение в ряд для $\ln 2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{(-1)^n}{n+1}+...=\ln 2\,.$$

Если сгруппировать в этом ряде слагаемые парами, начиная с первого члена, то получим для логарифма следующий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+2)}+...=\ln 2\,, \qquad (2)$$

который представляет собой сумму ряда (1) без чётных членов. В таком виде ряд (2) был впервые опубликован в 1668 году Уильямом Броункером (1620 – 1684), первым президентом Лондонского королевского общества [2, 5].

Ряды (1) и (2), очевидно, является частными случаями более общего ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(kn+1)(kn+2)}=\frac{1}{1\cdot 2}+...+\frac{1}{(kn+1)\cdot(kn+2)}+..., \quad k=1,2,3,..., \qquad (3)$$

который мы назовём обобщённым рядом Менголи – Броункера или рядом Менголи – Броункера *k*-го порядка.

2. Вычисление суммы ряда Менголи – Броункера *k*-го порядка через интеграл. Покажем, что ряд (3) сходится для любого натурального k и его сумма равна

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(kn+1)(kn+2)}=\int_0^1\frac{dx}{1+x+x^2+...+x^{k-1}}, \quad k=1,2,3,.... \qquad (4)$$

Замечание. Здесь мы пользуемся соглашением, что в случае $k=1$ интеграл в формуле (3) равен $\int_0^1 dx=1$.

Воспользуемся равенством

$$\frac{1}{(kn+1)(kn+2)}=\frac{1}{kn+1}-\frac{1}{kn+2}=\int_0^1 x^{kn}dx-\int_0^1 x^{kn+1}dx=\int_0^1 x^{kn}(1-x)dx \qquad (5)$$

и вычислим m-ю частичную сумму для натурального значения $k \geq 2$

$$S_m = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(kn+1)(kn+2)} = \sum_{n=0}^{m} \int_0^1 x^{kn}(1-x)dx = \int_0^1 (1-x) \sum_{n=0}^{m} (x^k)^n dx =$$

$$= \int_0^1 (1-x) \frac{1-x^{km+k}}{1-x^k} dx = \int_0^1 \frac{(1-x^{km+k})dx}{1+x+\ldots+x^{k-1}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x+\ldots+x^{k-1}} - \int_0^1 \frac{x^{km+k}dx}{1+x+\ldots+x^{k-1}}.$$

Отсюда получаем оценку

$$0 \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x+\ldots+x^{k-1}} - S_m = \int_0^1 \frac{x^{km+k}dx}{1+x+\ldots+x^{k-1}} \leq \int_0^1 x^{km+k}dx \leq \frac{1}{km+k+1}. \quad (6)$$

Пусть теперь $k=1$. Вычислим теперь m-ю частичную сумму, используя равенство (5)

$$S_m = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=0}^{m} \int_0^1 x^n(1-x)dx = \int_0^1 (1-x) \sum_{n=0}^{m} x^n dx =$$

$$= \int_0^1 (1-x) \frac{1-x^{m+1}}{1-x} dx = \int_0^1 \left(1-x^{m+1}\right) dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 x^{m+1}dx.$$

Отсюда получаем, что оценка (6) справедлива для значения $k=1$

$$0 \leq \int_0^1 dx - S_m = \int_0^1 x^{m+1}dx \leq \int_0^1 x^{m+1}dx \leq \frac{1}{m+2}.$$

Переходя здесь к пределу при стремлении $m \to \infty$ и применяя теорему о двух милиционерах, получим, с учётом сделанного выше замечания, сумму ряда (3)

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \int_0^1 \frac{dx}{1+x+\ldots+x^{k-1}}.$$

Заключение. Рассмотрены ряды Менголи – Броункера k-го порядка для любого натурального значения k. Вычислена их сумма через интеграл (см. формулу (4)). Для значений $k = 1, 2$ и 3 суммы легко вычисляются

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \int_0^1 dx = 1,$$

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2,$$

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}=\int_0^1\frac{dx}{1+x+x^2}=\int_0^1\frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Несколько сложнее найти сумму ряда (4) для значения $k=4$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+2)}=\int_0^1\frac{dx}{1+x+x^2+x^3}=\int_0^1\frac{dx}{(1+x)(x^2+1)}. \qquad (7)$$

Разложим подынтегральную функцию на сумму двух рациональных дробей методом неопределённых коэффициентов

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}=\frac{A(1+x^2)+(Bx+C)(1+x)}{(1+x)(1+x^2)}$$

и приравняем числители

$$1=A(1+x^2)+(Bx+C)(1+x)=(A+B)x^2+(B+C)x+(A+C).$$

Отсюда получаем систему алгебраических уравнений

$$A+B=0;\quad B+C=0;\quad A+C=1,$$

из которой находим, что $A=C=\frac{1}{2},\quad B=-\frac{1}{2}$. Тогда

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3}=\frac{1}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{x-1}{1+x^2}\right).$$

Подставляя в формулу (7), находим сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+2)}=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac{x-1}{1+x^2}\right)dx=\frac{\ln 2}{4}+\frac{\pi}{8}.$$

Суммы этих четырех рядов обычно приводятся в известных математических справочниках [6, 7].

Целью наших дальнейших исследований будет нахождение сумм рядов Менголе – Броункера для значений $k=5, 6, 7$ и 8.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Mengoli Pietro.** Novae quadraturae arithmeticae, seu De additione fractionum. – Bononiae: Ex typographia Iacobi Montij, 1650.
2. **История математики.** Т2. Математика XVII столетия. Под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 301 с.
3. **Cajori F.** A History of Mathematics. 2-nd ed. – L.: Macmillan & Co., Ltd, 1919, p. 173.
4. **Mengoli Pietro.** Geometriae speciosae elementa. – Bononiae, 1659.
5. **Brouncker W.** The squaring of the Hyperbola by an infinite series of rational numbers. Philos. Trans., 1668.
6. **Двайт Г.Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. Перевод с английского Н.В. Леви. – М. Наука, гл. ред. физ. – мат. лит., 1983. – 176 с.
7. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, рядов и произведений. 7-е изд. Перевод с английского В.В. Максимова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 1232 с.

REFERENCES

1. **Mengoli Pietro.** Novae quadraturae arithmeticae, seu De additione fractionum. – Bononiae: Ex typographia Iacobi Montij, 1650.
2. **Istorija matematiki**. T2. Matematika XVII stoletija Pod red. A.P. Jushkevicha. – Moscow: Nauka, 1970. – 301 p.
3. **Cajori F.** A History of Mathematics. 2-nd ed. – L.: Macmillan & Co., Ltd, 1919, p. 173.
4. **Mengoli Pietro.** Geometriae speciosae elementa. – Bononiae, 1659.
5. **Brouncker W.** The squaring of the Hyperbola by an infinite series of rational numbers. Philos. Trans., 1668.
6. **Dwight H.B.** Tables of Integrals and Other Mathematical Data. 4-d ed. - N.Y.: Macmillan, 1961.
7. **Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series, and Products. 7-th ed., Elsevier Inc., 2007.**

ON THE SUMMATION OF MENGOLI – BROUNCKER'S SERIES OF THE K-TH ORDER

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

The family of infinite series was proposed generalizing infinite series of the reciprocals of the triangular numbers (Mengoli's infinite series) and Brouncker's infinite series and depending on the natural parameter. For each parameter's value the sum of such series was calculated through the integral. For simple cases (parameter values 1, 2, 3, and 4) the integral was calculated in closed form.

Key words: infinite series, telescopic series, infinite series of the reciprocals of the triangular numbers, Mengoli's series, Brouncke's series, P. Mengoli, W. Brouncker.

Для простейших случаев (значений параметра 1, 2, 3 и 4) интеграл вычислен в замкнутой форме.