517.518.12

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ р-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ В ГРАНИЧНОЙ ТОЧКЕ ЕДИНИЧНОГО КРУГА

Ю.В. ТЕРЕНТЬЕВА

Кубанский государственный технологический университет,

350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;

электронная почта: terentevauv@gmail.com

Для p-аналитических функций, являющихся решениями эллиптических систем, вырождающихся в граничной точке единичного круга, а также для производной, получены интегральные представления Гергена–Дресселя. В работе приводится доказательство данного результата, отличное от известного ранее.

Ключевые слова: p-аналитичекие функции, сингулярные интегралы, уравнение Бельтрами, квазиконформные отображения, класс Макенхаупта.

Пусть $w(z)=u(z)+iv(z)$ – решение эллиптической системы

$$\begin{cases} p(z)u_x = v_y, \\ p(z)u_y = -v_x, \end{cases} \tag{1}$$

которое осуществляет топологическое отображение круга $B_1=\{z\in C:|z|<1\}$ на себя, нормированное условиями

$$w(z_0)=i,\ w(z_1)=-i,\ w(z_2)=w_2,\ |z_0|=|z_1|=|z_2|=|w_2|=1, \tag{2}$$

$$z_0\neq z_1\neq z_2,\ w_2\neq i,\ w_2\neq -i.$$

Комплексная форма системы (1) имеет вид

$$w_{\overline{z}}=q(z)\overline{w_z}, \qquad q(z):=\frac{1-p(z)}{1+p(z)}. \tag{3}$$

Относительно функции $p(z)$ будем считать выполненным следующее условие D: пусть функция $p:\overline{B}_1\to R$ непрерывно дифференцируема в $\overline{B}_1\setminus\Gamma_0$, $\Gamma_0=\{z_0\}$, $z_0\in\Gamma:=\partial B_1$, положительна в B_1, в окрестности Γ_0 удовлетворяет условиям

$$a_1 dist^{\alpha}(z,\Gamma_0) \le p(z) \le a_2 dist^{\alpha}(z,\Gamma_0),$$

$$b_1 dist^{\alpha-1}(z,\Gamma_0) \le |\nabla p(z)| \le b_2 dist^{\alpha-1}(z,\Gamma_0),$$

$$0<\alpha<1,\ 0<a_1<a_2,\ 0<b_1<b_2,\ 0<c_1<c_2,\ 0<d_1<d_2.$$

Так как характеристика $K(z)$ неограниченна в точках дуги Γ_0, то система (1) является вырождающейся.

Результат о существовании решений системы (1), содержащийся в формулируемой ниже теореме, является известным [1, 2], но мы приведем своё доказательство этого результата.

Теорема. *Пусть функция* $p(z)$ *из системы (1) удовлетворяет условию D и допускает продолжение в C функцией, являющейся* $A_2(C)$ *— весом [3]. Тогда существует единственное решение нелинейного уравнения Бельтрами* (3)*, являющееся квазиконформным в среднем отображением круга* B_1 *на себя, непрерывным вплоть до границы* B_1*, нормированное условием* (2)*. При этом для функции* $\omega(z)=p(z)u(z)+iv(z)$ *и её производной* $\omega_z(z)$ *имеют место следующие интегральные представления в круге* B_1*:*

$$\omega(z)=\Phi(z)-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{B_1}\left[\frac{\omega_{\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta-z}+\frac{z}{z\bar\zeta-1}\overline{\omega_{\bar\zeta}(\zeta)}\right]d\xi d\eta, \tag{4}$$

$$\omega_z(z)=\Phi'(z)-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{B_1}\left[\frac{\omega_{\bar\zeta}(\zeta)}{(\zeta-z)^2}+\frac{\overline{\omega_{\bar\zeta}(\zeta)}}{(z\bar\zeta-1)^2}\right]d\xi d\eta, \tag{5}$$

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}v(\zeta)dt+\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}p(\zeta)u(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}dt,\ \zeta=e^{it}.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность K_n - квазиконформных отображений $\{w_n\}$

$$w_n(z)=u_n(z)+iv_n(z),\ K_n=\sup_{z\in B_1} p_n^{-1}(z),\ p_n(z):=p\big((1-1/n)z\big),$$

нормированных условием (2), являющихся в круге B_1 решениями уравнений Бельтрами:

$$w_{n\bar{z}}=\frac{1-p_n(z)}{1+p_n(z)}\overline{w_{nz}}\,. \tag{6}$$

Пусть $\{\omega_n\}$, $\omega_n:=p_n u_n+iv_n$, последовательность отображений, построенных по функциям w_n. Докажем, что для предельной функции $\omega(z)$ и её производной $\omega_z(z)$ имеют место интегральные представления (4) и (5) при $z\in B_1$.

Учитывая связь (1) между функциями $u_n(z)$ и $v_n(z)$, легко показать, что $\omega_{n\bar{z}}=p_{n\bar{z}}u_n$. Так как $0<\alpha<1$, то $p_{n\bar{z}}u_n\in L_1(B_1)$. Поэтому для последовательностей $\{\omega_n\}$, $\{\omega_{nz}\}$ справедливы следующие интегральные представления [4]:

$$\omega_n(z)=\Phi_n(z)-\frac{1}{2\pi}\iint_{B_1}\left[\frac{\omega_{n\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta-z}+\frac{z}{z\bar{\zeta}-1}\overline{\omega_{n\bar{\zeta}}(\zeta)}\right]d\xi d\eta:=\Phi_n(z)+R_n(z), \tag{7}$$

$$\omega_{nz}(z)=\Phi_n'(z)-\frac{1}{2\pi}\iint_{B_1}\left[\frac{\omega_{n\bar{\zeta}}(\zeta)}{(\zeta-z)^2}+\frac{\overline{\omega_{n\bar{\zeta}}(\zeta)}}{(z\bar{\zeta}-1)^2}\right]d\xi d\eta=\Phi_n'(z)+R_n'(z), \tag{8}$$

$$\Phi_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma v_n(\zeta)dt+\frac{i}{2\pi}\int_\Gamma p_n(\zeta)u_n(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}dt,\ \zeta=e^{it}, \tag{9}$$

$$R_n(z):=R_1\big(\omega_{n\bar{\zeta}},z,B_1\big)+R_2\big(\omega_{n\bar{\zeta}},z,B_1\big), \tag{10}$$

$$R_1\big(\omega_{n\bar{\zeta}},z,B_1\big):=-\frac{1}{2\pi}\iint_{B_1}\frac{1}{\zeta-z}\omega_{n\bar{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta;$$

$$R_2\big(\omega_{n\bar{\zeta}},z,B_1\big):=-\frac{1}{2\pi}\iint_{B_1}\frac{z}{z\bar{\zeta}-1}\overline{\omega_{n\bar{\zeta}}(\zeta)}d\xi d\eta.$$

Ясно, что для доказательства сходимости последовательности $\{R_n\}$ достаточно рассмотреть только последовательность $\{R_1\}$ [5].

Введем обозначения. Пусть

$$B_r = \{\zeta \in B_1 : |\zeta| < r\},\ C_{r1} = \{\zeta \in B_1 : r < |\zeta| < 1\},\ r < 1.$$

Докажем сходимость следующих последовательностей:

$$R_1\left(p_{n\bar{\zeta}}u_n, z, B_1\right),\ R_{1z}\left(p_{n\bar{\zeta}}u_n, z, B_1\right).$$

Пусть $z \in B_t$, $t < r < 1$. Ясно, что

$$R_1\left(\omega_{n\bar{\zeta}}, z, B_1\right) = R_1\left(\omega_{n\bar{\zeta}}, z, B_r\right) + R_1\left(\omega_{n\bar{\zeta}}, z, C_{r1}\right),$$

$$R_{1z}\left(\omega_{n\bar{\zeta}}, z, B_1\right) = R_{1z}\left(\omega_{n\bar{\zeta}}, z, B_r\right) + R_{1z}\left(\omega_{n\bar{\zeta}}, z, C_{r1}\right).$$

Так как последовательность $\left\{\omega_{n\bar{\zeta}}\right\}$, $\omega_{n\bar{\zeta}} = p_{n\bar{\zeta}}u_n$ ограничена в пространстве Гельдера $C^{\tilde{\alpha}}(B_r)$,

$$\tilde{\alpha} = \sup_{z \in B_r, n \in \mathbb{N}}{}^{-1} p_n^{-1}(z),$$

то операторы T, Π ограничены в пространстве $C^{\tilde{\alpha}}(B_r)$ [6]. Поэтому при фиксированном $r = r(\varepsilon)$ разности

$$\left|R_1\left(\omega_{n\bar{\zeta}}, z, B_r\right) - R_1\left(\omega_{\bar{\zeta}}, z, B_r\right)\right|;\quad \left|R_{1z}\left(\omega_{n\bar{\zeta}}, z, B_r\right) - R_{1z}\left(\omega_{\bar{\zeta}}, z, B_r\right)\right|$$

могут быть сделаны сколько угодно малыми. Тогда последовательности $R_1\left(\omega_{n\bar{\zeta}}, z, B_r\right)$, $R_{1z}\left(\omega_{n\bar{\zeta}}, z, B_r\right)$ сходятся к интегралам $R_1\left(\omega_{\bar{\zeta}}, z, B_r\right)$, $R_1\left(\omega_{\bar{\zeta}}, z, B_r\right)$, соответственно, равномерно по n при $z \in B_t$, $t < r < 1$.

Рассмотрим теперь последовательности $R_1\left(\omega_{n\bar{\zeta}}, z, C_{r1}\right)$ и $R_{1z}\left(\omega_{n\bar{\zeta}}, z, C_{r1}\right)$ при $z \in B_t$. Легко показать, что согласно теореме Лебега [7] последовательности $R_1\left(\omega_{n\bar{\zeta}}, z, C_{r1}\right)$ и $R_{1z}\left(\omega_{n\bar{\zeta}}, z, C_{r1}\right)$ сходятся соответственно к интегралам $R_1\left(\omega_{\overline{\zeta}}, z, C_{r1}\right)$ и $R_{1z}\left(\omega_{\overline{\zeta}}, z, C_{r1}\right)$ при $z \in B_t$. Легко показать, что существуют интегралы $R_1\left(\omega_{\overline{\zeta}}, z, B_1\right)$ и $R_{1z}\left(\omega_{\overline{\zeta}}, z, B_1\right)$.

Переходя к пределу по n в представлении (9), получим

$$\Phi(z) = c_0 + \frac{i}{2\pi} \int\limits_{\Gamma \backslash \{z_0\}} p(\zeta) u(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} dt .$$

Заметим, что в силу топологических соображений функция $\omega(z)$ непрерывна в точке z_0 слева и справа. Такими же свойствами обладает функция $\Phi(z)$. Поэтому в силу принципа Линделефа [8] она непрерывна в точке z_0. Таким образом, предельная функция $\Phi(z) \in C\left(\overline{B}_1\right)$.

Покажем теперь, что предельная функция $w(z)$ является непрерывной в $\overline{B}_1$. Функция $w(z)$, являющаяся пределом K_ε-квазиконформных отображений $w_n(z)$, также является K_ε-квазиконформной в области $\overline{B}_1 \setminus B_{\delta(\varepsilon)}$,

$$B_{\delta(\varepsilon)} = \left\{\zeta \in B_1 : \left|\zeta - z_0\right| < \varepsilon\right\},$$

для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$, поэтому она является непрерывной в $\overline{B}_1 \setminus B_{\delta_1(\varepsilon)}$ и, следовательно, в $\overline{B}_1 \setminus \{z_0\}$.

Покажем, что функция $v(z)$ будет непрерывной в замкнутом круге $\overline{B}_1$. Для этого докажем, $v(z)$ принимает значения непрерывной функции $\operatorname{Im}\Phi(z)$ почти всюду на Γ.

Так как ядра $K_1(z,\zeta)$, $K_2(z,\zeta)$,

$$K_1(z,\zeta) := 1/(\zeta - z),\ K_2(z,\zeta) := z/\left(\overline{\zeta} z - 1\right),$$

сопряжены при $z \in \Gamma$, то из представления (9) имеем, что

$$v_n\big|_\Gamma = \operatorname{Im}\Phi_n\big|_\Gamma . \tag{11}$$

Поскольку $v_n \in W^{1,2}(B_1)$ и ограничены в нем, то $v_n \in W^{1/2,2}(\Gamma)$ и ограничены в этом пространстве [9]. В силу равенства (11) имеем, что $\operatorname{Im}\Phi_n\big|_\Gamma$ принадлежат пространству $W^{1/2,2}(\Gamma)$ и ограничены в нем [9]. Поэтому $\operatorname{Im}\Phi_n\big|_\Gamma \in W^{1,2}(B_1)$ и ограничены в этом пространстве.

Согласно представлению (7) можно утверждать, что $\operatorname{Im} R_n(z) \in W^{1,2}(B_1)$ и ограничены в этом пространстве. Следовательно, они равностепенно непрерывны по сдвигу границы [10] и $\operatorname{Im} R(z)$ принимает в среднем нулевые граничные значения.

Ясно тогда, что $v(z)$ принимает на Γ значения непрерывной функции $\operatorname{Im}\Phi(z)$ в среднем. Поэтому функция $v(z)$ принимает в точке z_0 в слабом смысле значение $\operatorname{Im}\Phi(z_0)$. Используя систему (1), а также критерий Винера [11] регулярности граничных точек, легко показать, что функция $v(z)$, являющаяся решением задачи Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения

$$\left(p^{-1}v_x\right)_x + \left(p^{-1}v_y\right)_y = 0, \qquad (12)$$

непрерывна во всех точках $z \in \Gamma$.

Докажем теперь непрерывность функции $u(z)$ в точке z_0. Функции $u_n(z)$ являются непрерывными функциями из пространства $W^{1,2}(B_1)$. Так как топологические отображения w_n при $|z| = 1$ удовлетворяют условию

$$|w_n| = 1,$$

то функции $u_n(z)$ принимают на Γ значения функций $\pm\sqrt{1 - v_n^2(z)}$ в среднем [6].

Так как $v(z) \in C(\overline{B}_1)$, то функция $u(z)$ принимает на границе круга B_1 значения непрерывных функций $\pm\sqrt{1 - v^2(z)}$ почти всюду.

Используя критерий Винера, можно доказать непрерывность функции $u(z)$ в точке z_0 как решения задачи Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения

$$\left(pu_x\right)_x + \left(pu_y\right)_y = 0, \qquad (13)$$

которое является следствием системы (1).

Функция $w(z)$ является, очевидно, однолистной [5] и имеют место интегральные представления (4), (5).

Теорема доказана.

Данный результат может быть использован при изучении интегральных свойств вырождающихся в граничной точке единичного круга p-аналитических функций, являющихся квазиконформными в среднем отображениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Митюк И.П., Шеретов В.Г., Щербаков Е.А.** Плоские квазиконформные отображения. Краснодар: Изд-во КубГУ, 1979. 84 с.

2. **Щербаков Е.А.** Гомеоморфные решения одной вырождающейся эллиптической системы // Изв. вузов. Математика. 1976. № 10 (173). С. 93–96.

3. **Малаксиано Н.А.** О точных вложениях классов Геринга в классы Макенхаупта // Матем. заметки. 2011. Т. 70. Вып. 5. С. 742–750.

4. **Gergen J.J., Dressel F.G.** Mapping for elliptic Equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1954. № 77. P. 151–178.

5. **Боярский Б.В.** Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Матем. сб. 1957. Т. 43. № 4. С. 451–503.

6. **Векуа И.Н.** Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 512 с.

7. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1976. 543 с.

8. **Евграфов М.А.** Аналитические функции. М.: Наука, 1968. 471 с.

9. **Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.

10. **Вашарин А.А.** Граничные свойства функций класса $W_2^1(\alpha)$ и их приложение к решению одной краевой задачи математической физики // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1959. № 23. С. 421–454.

11. **Stredulinsky E.W.** Weighted inequalition and Degenerate Elliptic partial Differential Equations // Lachtes Notes in Mathematics Springer. 1984. № 1074. 142 p.

REFERENCES

1. Mityuk I.P., Sheretov V.G., Shcherbakov E.A., *Ploskie kvazikonformnye otobrazheniya* (Flat quasiconformal mapping), Krasnodar, 1979, 84 p.

2. Shcherbakov E.A., *Izv. vuzov. Matematika*, 1976, no. 10 (173), pp. 93–96.

3. Malaksiano N.A., *Matem. Zametki*, 2011, vol. 70, iss. 5, pp. 742–750.

4. Gergen J.J., Dressel F.G., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1954, no. 77, pp. 151–178.

5. Boyarskiy B.V., *Matem. sb.*, 1957, vol. 43, no. 4, pp. 451–503.

6. Vekua I.N., *Obobshchennye analiticheskie funktsii* (Generalized analytic functions), Moscow, 1988, 512 p.

7. Kolmogorov A.N., Fomin S.V., *Elementy teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza* (Elements of the theory of functions and functional analysis), Moscow, 1976, 543 p.

8. Evgrafov M.A., *Analiticheskie funktsii* (Analytic functions), Moscow, 1968, 471 p.

9. Besov O.V., Ilin V.P., Nikolskiy S.M., *Integralnye predstavleniya funktsiy i teoremy vlozheniya* (Integral representations of functions and embedding theorems), Moscow, 1975, 480 p.

10. Vasharin A.A., *Izv. AN SSSR. Ser. Matematika*, 1959, no. 23, pp. 421–454.

11. Stredulinsky E.W., *Weighted inequalition and Degenerate Elliptic partial Differential Equations*, Lachtes Notes in Mathematics Springer, 1984, no. 1074, 142 p.

Поступила 07.05.14 г.

ON THE INTEGRAL REPRESENTATIONS p-ANALYTIC FUNCTIONS DEGENERATE AT THE BOUNDARY POINT OF THE UNIT DISK

YU.V. TERENTEVA

Kuban State Technological University,

2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072; e-mail: terentevauv@gmail.com

For *p*-analytic functions that are solutions of elliptic systems degenerate at the boundary point of the unit circle, as well as for the derivative, integral representations obtained Gergen-Dressel. In this paper presents a proof of this result is different from the prior art. This result can be used to study the integral properties of degenerate at the boundary point of the unit circle p-analytic functions that are quasi-conformal mappings on average.

Key words: *p*-analytic functions, singular integrals, the Beltrami equation, quasi-conformal mappings, Muckenhoupt class.