517.521

БАЗЕЛЬСКАЯ ЗАДАЧА I. МЕТОД КОШИ И ЕГО ОБОБЩЕНИЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ СУММ ЧИСЕЛ ОБРАТНЫХ ЧЕТВЁРТОЙ СТЕПЕНИ

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,

350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2; e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

Рассмотрена задача вычисления сумм чисел обратных четвёртым степеням натуральных чисел методом Коши. Этот метод первоначально был им использован для решения частного случая – знаменитой базельской задачи. После подробного рассмотрения этого частного случая показано, как можно обобщить метод Коши для решения задачи о суммировании ряда чисел обратных четвёртым степеням натуральных чисел без использования разложения в бесконечное произведение. В работе получены новые тригонометрические формулы, которые используются при выводе сумм рассматриваемых рядов.

Ключевые слова: базельская задача, обобщённая базельская задача, числа Бернулли, сумма бесконечного ряда, Эйлер, Коши, суммирование обратных четвертой степени натуральных чисел.

1. Базельская задача. Итальянский математик Пьетро Менголи (1625–1686) известен в истории математики как первый математик, который в 1644 г. безуспешно пытался найти сумму бесконечного ряда обратных квадратов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots . \qquad (1)$$

После него за дело взялись два выдающихся математика – братья Яков Бернулли (1654–1705) и Иоганн Бернулли (1667–1748), которые, не сумев вычислить сумму ряда (1), в 1704 г. [1] привлекли к этой проблеме внимание многих европейских математиков. С тех пор задача о суммировании ряда (1) получила название *Базельской задачи* (*Basel* *problem*) по имени города Базеля в Швейцарии – родного города братьев Бернулли.

Базельская задача была решена в 1734–1735 годах в Санкт-Петербурге учеником Иоганна Бернулли и уроженцем города Базеля, гениальным швейцарским математиком Леонардом Эйлером (1707–1786) [2–4], большую часть прожившим в России. Он нашёл, что сумма ряда (1) равна

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \qquad (2)$$

Остроумный метод, который применил Эйлер, заключался в разложении степенного ряда

$$\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+..$$

в бесконечное произведение

$$\frac{\sin x}{x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\ldots.$$

Раскрывая здесь скобки, мы получим ещё одно разложение в степенной ряд с коэффициентом при члене x^2, равным

$$-\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\right)\frac{1}{\pi^2}.$$

Поскольку разложение в бесконечный ряд единственно, то коэффициент при члене x^2 должен быть равен $-\frac{1}{3!}$. Отсюда получаем равенство

$$-\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\right)\frac{1}{\pi^2}=-\frac{1}{3!},$$

из которого следует равенство (2).

Метод Эйлера не был строгим даже на уровне того времени и вызвал обоснованные возражения. Тем не менее, он принёс Эйлеру славу лучшего математика мира и позволил ему в дальнейшем найти суммы чисел обратных чётным степеням натуральных чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_k\,, \tag{3}$$

где

$k\geq 1$ – натуральное число;

B_k – числа Бернулли $\left(B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},\quad B_4=\frac{1}{30},\dots\right)$, названные по имени Якова Бернулли, который ввел их для вычисления конечных сумм степеней натуральных чисел [5, 6].

Задачу вычисления суммы общего гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{m}}=1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\dots+ \tag{4}$$

для произвольного натурального показателя степени $m\geq 2$ будем называть *обобщенной Базельской задачей*. Эту задачу частично решил Эйлер, найдя сумму ряда (4) для произвольного четного натурального показателя степени m (см. формулу (3)). Для нечётного m задача не решена до настоящего времени.

2. Решение Коши Базельской задачи. В 1821 г. Коши привёл два решения Базельской задачи в своей знаменитой, но мало знакомой современному читателю книге «Курс алгебраического анализа» [7, 8]. Второе решение по сути являлось не чем иным, как строгим обоснованием решения Эйлера, основанным на разложении (4). В запланированной серии статей мы его рассматривать не будем. Зато первое решение Коши было совершенно оригинальным. Коши исходил из тригонометрического равенства

$$\frac{(m+2)(m-2)}{3!}=\frac{1}{\sin^2\dfrac{2\pi}{2m}}+\frac{1}{\sin^2\dfrac{4\pi}{2m}}+\ldots+\frac{1}{\sin^2\dfrac{(m-2)\pi}{2m}}, \qquad (5)$$

где m – четное натуральное число. Умножая левую и правую часть равенства (5) на $\dfrac{\pi^2}{m^2}$ Коши получил равенство

$$\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{4}{m^2}\right)=\frac{\left(\dfrac{\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\dfrac{\pi}{m}}+\frac{1}{4}\frac{\left(\dfrac{2\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\dfrac{2\pi}{m}}+\ldots+\frac{1}{\left(\dfrac{m}{2}-1\right)^2}\frac{\left(\dfrac{(m/2-1)\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\dfrac{\left(\dfrac{m}{2}-1\right)\pi}{m}}. \qquad (6)$$

Так как $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{\pi^2}{6}\left(1-\dfrac{4}{m^2}\right)=\dfrac{\pi^2}{6}$, то отсюда следует, что

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{\left(\dfrac{\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\dfrac{\pi}{m}}+\frac{1}{4}\frac{\left(\dfrac{2\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\dfrac{2\pi}{m}}+\ldots+\frac{1}{\left(\dfrac{m}{2}-1\right)^2}\frac{\left(\dfrac{(m/2-1)\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\dfrac{\left(\dfrac{m}{2}-1\right)\pi}{m}}\right]=\frac{\pi^2}{6}. \qquad (7)$$

Коши понимал, что хотя первые слагаемые в (7) стремятся в пределе к обратным квадратам

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{k^2}\frac{\left(\dfrac{k\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\dfrac{k\pi}{m}}=\frac{1}{k^2}, \quad k=1,2,\ldots,n,$$

в силу первого замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$ требуется доказательство утверждения того, что

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{\pi}{m}}+..+\frac{1}{\left(\frac{m}{2}-1\right)^2}\frac{\left(\frac{(m/2-1)\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\pi}{m}}\right]=1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}+.... \quad (8)$$

Чтобы доказать формулу (8), Коши разбил сумму в левой части равенства (7) на две суммы

$$\frac{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{\pi}{m}}+\frac{1}{4}\frac{\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}+...+\frac{1}{n^2}\frac{\left(\frac{n\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{n\pi}{m}} \quad (9)$$

и

$$\frac{1}{(n+1)^2}\frac{\left(\frac{(n+1)\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{(n+1)\pi}{m}}+...+\frac{1}{\left(\frac{m}{2}-1\right)^2}\frac{\left(\left(\frac{m}{2}-1\right)\frac{\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\pi}{m}}. \quad (10)$$

Для оценки суммы (9) Коши выбрал натуральное число n из условия

$$n<\frac{m}{2}. \quad (11)$$

и воспользовался известным неравенством

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},\quad 0<x<\frac{\pi}{2}, \quad (12)$$

возведя все его части в квадрат

$$1<\frac{x^2}{\sin^2 x}<\frac{1}{\cos^2 x},\quad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

Беря значения $x=x_k=\frac{k\pi}{m},\quad k=1,2,...,n$ и учитывая, что $\cos^2\frac{k\pi}{m}\ge\cos^2\frac{n\pi}{m}$, Коши получил оценку для суммы (9)

$$1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{\pi}{m}}+\frac{1}{4}\frac{\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}+\ldots+\frac{1}{n^2}\frac{\left(\frac{n\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{n\pi}{m}}<\frac{1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}}{\cos^2\frac{n\pi}{m}}. \quad (13)$$

Отсюда следует, что для выбранного значения n

$$1<\frac{\frac{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{\pi}{m}}+\frac{1}{4}\frac{\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}+\ldots+\frac{1}{n^2}\frac{\left(\frac{n\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{n\pi}{m}}}{1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}}<\cos^{-2}\frac{n\pi}{m}.$$

Поэтому найдётся число $M\left(1,\cos^{-2}\frac{n\pi}{m}\right)$ из интервала $\left(1,\cos^{-2}\frac{n\pi}{m}\right)$, равное

$$M\left(1,\cos^{-2}\frac{n\pi}{m}\right)=\frac{\frac{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{\pi}{m}}+\frac{1}{4}\frac{\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}+\ldots+\frac{1}{n^2}\frac{\left(\frac{n\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{n\pi}{m}}}{1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}}.$$

Отсюда

$$\frac{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{\pi}{m}}+\frac{1}{4}\frac{\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}+\ldots+\frac{1}{n^2}\frac{\left(\frac{n\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{n\pi}{m}}=\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)M\left(1,\cos^{-2}\frac{n\pi}{m}\right). \quad (14)$$

Для оценки второй суммы (10) Коши сохраняет условие (11) и видоизменяет неравенство (12)

$$0<1<\frac{x}{\sin x}=\frac{x/2}{\sin x/2}\frac{1}{\cos x/2}<\frac{1}{\cos x/2}\frac{1}{\cos x/2}<\frac{1}{\cos^2\pi/4}=2, \quad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда получается оценка для суммы (10)

$$0<\frac{1}{(n+1)^2}\frac{\left(\frac{(n+1)\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{(n+1)\pi}{m}}+\ldots+\frac{1}{\left(\frac{m}{2}-1\right)^2}\frac{\left(\left(\frac{m}{2}-1\right)\frac{\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\pi}{m}}<$$

$$<\frac{4}{(n+1)^2}+\frac{4}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{4}{\left(\frac{m}{2}-1\right)^2}<\frac{4\left(\frac{m}{2}-n-1\right)}{(n+1)^2}<\frac{2m}{n^2}.$$

Тогда найдётся число $M(0,1)$ из интервала $(0,1)$, такое что

$$\frac{1}{(n+1)^2}\frac{\left(\frac{(n+1)\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{(n+1)\pi}{m}}+..+\frac{1}{\left(\frac{m}{2}-1\right)^2}\frac{\left(\left(\frac{m}{2}-1\right)\frac{\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\pi}{m}}=\frac{2m}{n^2}M(0,1).$$

В этом случае равенство (6) теперь можно записать

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{2\pi^2}{3m^2}+\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)M\left(1,\cos^{-2}\frac{n\pi}{m}\right)+\frac{2m}{n^2}M(0,1), \quad (15)$$

или, учитывая, что $1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2$,

$$\left|\frac{\pi^2}{6}-\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)\right|\le\frac{2\pi^2}{3m^2}+2\,\mathrm{tg}^2\frac{n\pi}{m}+\frac{2m}{n^2}. \quad (16)$$

Положим $n=k^3,\quad m=k^4,\quad k=1,2,3,\ldots$. Условие $\frac{m}{2}>n$ выполняется, начиная со значений $k>2$. Тогда

$$\left|\frac{\pi^2}{6}-\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{(k^3)^2}\right)\right|\le\frac{2\pi^2}{3k^8}+2\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{k}+\frac{2}{k^2}. \quad (17)$$

Так как $\frac{2\pi^2}{3k^8}+2\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{k}+\frac{2}{k^2}\to 0$ при $k\to\infty$, то для любого сколь угодно малого вещественного числа $\varepsilon>0$ найдётся такое число K_ε, что для любого номера $k>K_\varepsilon$ будет выполнено неравенство

$$\left|\frac{\pi^2}{6}-\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{(k^3)^2}\right)\right|<\varepsilon .$$

Следовательно, в силу монотонного возрастания суммы $1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$, для любого номера $n>k^3>K_\varepsilon$ будет выполнено неравенство

$$\left|\frac{\pi^2}{6}-\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)\right|<\left|\frac{\pi^2}{6}-\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{(k^3)^2}\right)\right|<\varepsilon .$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}. \tag{18}$$

Замечание. У Коши [7] такого обоснования последнего предела нет. Оно найдено автором данной работы. То, что из равенства (16) следует предел (18) для Коши было очевидным, если, при соблюдении условия $\frac{m}{2}>n$, выбрать $m=[n^a]+1,\quad 1<a<2$.

Теперь займемся обоснованием тригонометрического равенства (5). Пусть $m=2k$, где k – натуральное число. Тогда, используя известное тождество

$$\frac{1}{\sin^2 x}=1+\operatorname{ctg}^2 x,$$

перепишем равенство (7) следующим образом

$$\frac{2(k+1)(k-1)}{3}=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2k}}+\frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{2k}}+\ldots+\frac{1}{\sin^2\frac{(k-1)\pi}{2k}}, \tag{19}$$

или

$$\frac{(2k-1)(k-1)}{3}=\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2k}+\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2k}+\ldots+\operatorname{ctg}^2\frac{(k-1)\pi}{2k}. \tag{20}$$

Числа $\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2k},\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2k},\ldots,\operatorname{ctg}^2\frac{(k-1)\pi}{2k}$ трактуем как корни многочлена степени $k-1$

$$P_{k-1}(x)=\left(x-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2k}\right)\left(x-\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2k}\right)\dots\left(x-\operatorname{ctg}^2\frac{(k-1)\pi}{2k}\right).$$

Чтобы найти этот многочлен, воспользуемся ещё одной известной тригонометрической формулой [7]

$$\sin 2kx=C_{2k}^1\cos^{2k-1}x\sin x-C_{2k}^3\cos^{2k-3}x\sin^3 x+\dots+(-1)^{k-1}C_{2k}^{2k-1}\cos x\sin^{2k-1}x$$

или

$$\frac{\sin 2kx}{\sin^{2k}x\operatorname{ctg}x}=C_{2k}^1\left(\operatorname{ctg}^2 x\right)^{k-1}-C_{2k}^3\left(\operatorname{ctg}^2 x\right)^{k-2}+\dots+(-1)^{k-1}C_{2k}^{2k-1}.$$

Если $x=x_s=\frac{s\pi}{2k},\quad s=1,2,3,\dots,k-1$, то $\frac{\sin 2kx_s}{\sin^{2k}x_s\operatorname{ctg}x_s}=0$. Поэтому

$$C_{2k}^1\left(\operatorname{ctg}^2 x_s\right)^{k-1}-C_{2k}^3\left(\operatorname{ctg}^2 x_s\right)^{k-2}+\dots+(-1)^{k-2}C_{2k}^{2k-3}\left(\operatorname{ctg}^2 x_s\right)+(-1)^{k-1}C_{2k}^{2k-1}=0.$$

Следовательно, $\operatorname{ctg}^2 x_s$ корни многочлена

$$P_{k-1}(x)=x^{k-1}-\frac{C_{2k}^3}{C_{2k}^1}x^{k-2}+\dots+(-1)^{k-2}\frac{C_{2k}^{2k-3}}{C_{2k}^1}x+(-1)^{k-1}\frac{C_{2k}^{2k-1}}{C_{2k}^1}=0. \qquad (21)$$

В таком случае сумма корней равна коэффициенту при x^{n-2}, взятому с противоположным знаком

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2k}+\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2k}+\dots+\operatorname{ctg}^2\frac{(k-1)\pi}{2k}=\frac{C_{2k}^3}{C_{2k}^1}=\frac{(2k-1)(k-1)}{3}.$$

Равенство (19) доказано.

3. Метод Коши и его обобщение для вычисления сумм чисел обратных четвёртой степени. Покажем, как следует обобщить метод Коши, чтобы вычислить сумму ряда чисел обратных четвёртым степеням. Для этого, учитывая тождество $\frac{1}{\sin^2\alpha}=1+\operatorname{ctg}^2\alpha$, возведем в квадрат равенство (19), умножив его части на множитель $\left(\frac{\pi}{2k}\right)^4$

$$\frac{4(k^2-1)^2}{9}\left(\frac{\pi}{2k}\right)^4=\sum_{n=1}^{k-1}\frac{\left(\frac{\pi}{2k}\right)^4}{\sin^4\frac{n\pi}{2k}}+2\left(\frac{\pi}{2k}\right)^4\sum_{n=1}^{k-2}\sum_{p=n+1}^{k-1}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2k}\right)\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{p\pi}{2k}\right)$$

или

$$\sum_{n=1}^{k-1}\frac{\left(\frac{n\pi}{2k}\right)^4}{n^4\sin^4\frac{n\pi}{2k}}=\frac{4(k^2-1)^2}{9}\left(\frac{\pi}{2k}\right)^4-\left(\frac{\pi}{2k}\right)^4(k^2-3k+2)-$$

$$-2\sum_{n=1}^{k-2}\sum_{p=n+1}^{k-1}\left(\frac{\pi}{2k}\right)^4\left(\operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2k}+\operatorname{ctg}^2\frac{p\pi}{2k}\right)-2\sum_{n=1}^{k-2}\sum_{p=n+1}^{k-1}\left(\frac{\pi}{2k}\right)^4\left(\operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2k}\operatorname{ctg}^2\frac{p\pi}{2k}\right).$$

Из теоремы Виета следует, что корни многочлена (21) удовлетворяют равенству

$$\sum_{n=1}^{k-2}\sum_{p=n+1}^{k-1}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2k}\operatorname{ctg}^2\frac{p\pi}{2k}\right)=\frac{C_{2k}^5}{C_{2k}^1}=\frac{(k-1)(k-2)(2k-1)(2k-3)}{30}.$$

В силу равенства (19) имеем

$$0<\sum_{n=1}^{k-2}\sum_{p=n+1}^{k-1}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2k}+\operatorname{ctg}^2\frac{p\pi}{2k}\right)<\frac{2k(2k-1)(k-1)}{3}.$$

Тогда, получим

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{\left(\frac{n\pi}{2k}\right)^4}{n^4\sin^4\frac{n\pi}{2k}}=\frac{\pi^4}{36}-\frac{\pi^4}{2\cdot 30}=\frac{\pi^4}{90}. \qquad (22)$$

С другой стороны, пользуясь теми же аргументами, что и при вычислении предела (8), найдём

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{\left(\frac{n\pi}{2k}\right)^4}{n^4\sin^4\frac{n\pi}{2k}}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{n^4}+\ldots.$$

Отсюда следует, что

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{n^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}.$$

Заключение. Метод Коши решения базельской задачи, предложенный им еще в 1821 г., допускает обобщение для нахождения суммы чисел обратных четвертой степени. Автор надеется, что в дальнейшем обобщенный метод Коши удастся изменить и упростить таким образом, чтобы стало возможным вычислить сумму чисел обратных любой чётной степени натуральных чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Stillwell J.** Mathematics and Its History. 3rd ed. N. Y.: Springer Science+Business Media, LLC, 2010. 660 p.
2. **Euler L.** “De summis serierum reciprocarum,” Commentarii academiae scientorum Petropolitanae, **7** (1734/35) 1740, pp. 123–134.
3. **Эйлер Л.** Дифференциальное исчисление. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. 580 с.
4. **Эйлер Л.** Введение в анализ бесконечных. Т. 1. 2-е изд. М.: ГИФМЛ, 1961. 315 с.
5. **Bernoulli J.** Ars Conjectandi. Basel: Thurneysen Brothers, 1713.
6. **Кудрявцев В.А.** Суммирование степеней чисел натурального ряда и числа Бернулли. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 73 с.
7. **Cauchy A.L.** Cours d'analyse de l'École royale polytechnique I.re partie: Analyse algébrique. Paris: Impr. royale Debure frères, 1821. 576 p.
8. **Bradley R.E., Sandifer C.E.** (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences) Cauchys Cours danalyse. An Annotated Translation. Springer, 2009. 411 p.

REFERENCES

1. Stillwell J., Mathematics and Its History. 3rd ed. N. Y.: Springer Science+Business Media, LLC, 2010. 660 p.
2. Euler L., “De summis serierum reciprocarum,” Commentarii academiae scientorum Petropolitanae, **7** (1734/35) 1740, pp. 123–134.
3. Eyler L., *Differentsialnoe ischislenie* (Differential calculus). Moscow, Leningrad, 1949. 580 p.

4. Eyler L., *Vvedenie v analiz beskonechnykh* (Introduction to the analysis of the infinite), Vol. 1, Moscow, 1961, 315 p.
5. Bernoulli J., Ars Conjectandi. Basel: Thurneysen Brothers, 1713.
6. Kudryavtsev V.A., *Summirovanie stepeney chisel naturalnogo ryada i chisla Bernulli* (The summation of powers of natural numbers and Bernoulli numbers), Moscow, Leningrad, 1936, 73 p.
7. Cauchy A.L., Cours d'analyse de l'École royale polytechnique I.re partie: Analyse algébrique. Paris: Impr. royale Debure frères, 1821. 576 p.
8. Bradley R.E., Sandifer C.E., (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences) Cauchys Cours danalyse. An Annotated Translation. Springer, 2009. 411 p.

Поступила 06.05.14 г.

THE BASEL PROBLEM I. THE CAUCHY METHOD AND ITS GENERALIZATION FOR THE SUMMATION OF THE RECIPROCALS OF THE FOURTH POWER OF THE NATURAL NUMBERS

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,

2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;

e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

The problem of the precise summation of the reciprocals of the fourth power of the natural numbers by the Cauchy method was considered. This method was originally used by Cauchy to solve the particular case – the famous Basel problem. Detailed consideration of this particular case shows how to generalize the Cauchy method to solve the problem of the summation of the reciprocals of the fourth power of the natural numbers without decomposition into an infinite product. New trigonometric formulas were obtained that are used in the summation of the series under consideration.

Key words: Basel problem, generalized Basel problem, Bernoulli numbers, sum of infinite series, Euler, Cauchy, summation of the reciprocals of the fourth power of the natural numbers.