УДК 517.521

НОВЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ СУММЫ ПЕРВЫХ ЧЕТВЁРТЫХ СТЕПЕНЕЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Рассмотрена сумма первых четвёртых степеней натуральных чисел. Предложен новый метод её вычисления, основанный на использовании возрастающей факториальной степени.

Ключевые слова: Возрастающая факториальная степень, сумма первых четвёртых степеней натуральных чисел.

1. Сумма первых четвёртых степеней натуральных чисел. Поставим перед собой задачу разыскания суммы четвёртых степеней первых n натуральных чисел

$$S_4(n) = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + (n-1)^4 + n^4 \ . \qquad (1)$$

Переписав сумму (1) в обратном порядке и сложив её с исходной суммой, получим

$$2S_4(n) = \left[1^4 + n^4\right] + \left[2^4 + (n-1)^4\right] + \ldots + \left[(n-1)^4 + 2^4\right] + \left[n^4 + 1^4\right].$$

Каждую сумму $\left[k^4 + (n+1-k)^4\right]$ дополним до четвертой степени суммы, прибавив, слева и справа от знака равенства, выражение

$$4k^3(n+1-k) + 6k^2(n+1-k)^2 + 4k(n+1-k)^3 =$$

$$= 2k(n+1-k)(2k^2 + 3k(n+1-k) + 2(n+1-k)^2) =$$

$$= 4k(n+1-k)(n+1)^2 - 2k^2(n+1-k)^2 .$$

Тогда получим

$$2S_4(n) + 4(n+1)^2 \sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) - 2\sum_{k=1}^{n} k^2 (n+1-k)^2 =$$

$$= \underbrace{(n+1)^4 + (n+1)^4 + \ldots + (n+1)^4 + (n+1)^4}_{n \text{ раз}} = n(n+1)^4 .$$

Отсюда, следует, что

$$S_4(n)=\frac{n\left(n+1\right)^4}{2}-2(n+1)^2\sum_{k=1}^{n}k(n+1-k)+\sum_{k=1}^{n}k^2(n+1-k)^2\,. \quad (2)$$

Используя определение возрастающей факториальной степени [1]

$$x^{\overline{k}}=\begin{cases}1, & k=0, \quad x\neq 0,\\ x, & k=1,\\ x(x-1)\ldots(x-k+1)\end{cases}$$

можем записать

$$k^2=k(k+1)-k=k^{\overline{2}}-k^{\overline{1}}, \quad (3)$$

$$(n+1-k)^2=(n+1-k)(n+2-k)-(n+1-k)=(n+1-k)^{\overline{2}}-(n+1-k)^{\overline{1}}\,. \quad (4)$$

Тогда, подставляя формулы (3) и (4) в последнюю сумму правой части (2), получим

$$\sum_{k=1}^{n}k^2(n+1-k)^2=\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{2}}(n+1-k)^{\overline{2}}-\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{2}}(n+1-k)^{\overline{1}}-\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{1}}(n+1-k)^{\overline{2}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{1}}(n+1-k)^{\overline{1}}.$$

Так как $\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{1}}(n+1-k)^{\overline{2}}=\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{2}}(n+1-k)^{\overline{1}}$, то последнюю формулу можно переписать иначе

$$\sum_{k=1}^{n}k^2(n+1-k)^2=\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{2}}(n+1-k)^{\overline{2}}-2\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{2}}(n+1-k)+\sum_{k=1}^{n}k(n+1-k)\,. \quad (5)$$

Суммы $\sum_{k=1}^{n}k(n+1-k)$ и $\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{2}}(n+1-k)^{\overline{1}}$ были вычислены в моей предыдущей статье этого сборника «Использование возрастающих факториальных степеней для суммирования некоторых рядов натуральных чисел»

$$\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{1}}(n+1-k)^{\overline{1}}=\sum_{k=1}^{n}k(n+1-k)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\,. \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{2}}(n+1-k)^{\overline{1}} = \sum_{k=1}^{n} k^{\overline{2}}(n+1-k) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{12}. \tag{7}$$

Подставляя формулы (6) и (7) в формулу (5) получим

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2}(n+1-k)^{2} = \sum_{k=1}^{n} k^{\overline{2}}(n+1-k)^{\overline{2}} - \frac{n(n+1)(n+2)^{2}}{6}. \tag{8}$$

Подставим теперь формулы (6) и (8) в формулу (2). Получим

$$S_4(n) = \frac{n(n+1)}{6}(n^3 - 5n - 5) + \sum_{k=1}^{n} k^{\overline{2}}(n+1-k)^{\overline{2}}. \tag{9}$$

2. Вычисление сумм вида $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}}(n+1-k)^{\overline{2}}}$. В предыдущей статье автора «Использование возрастающих факториальных степеней для суммирования некоторых рядов натуральных чисел» этого выпуска были вычислены суммы следующего вида

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}} = \frac{n^{\overline{m+1}}}{m+1}, \; m = 0, 1, 2, \ldots, \; n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}}(n+1-k) = \frac{n^{\overline{m+2}}}{(m+1)(m+2)}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{11}$$

В этом пункте мы вычислим следующую сумму

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}}(n+1-k)^{\overline{2}} = \frac{2n^{\overline{m+3}}}{(m+1)(m+2)(m+3)}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{12}$$

для которой сумма $\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{2}}(n+1-k)^{\overline{2}}$ является частным случаем.

Воспользуемся очевидными тождествами $k^{\overline{m}}(k+m) = k^{\overline{m+1}}$, $n+2-k = (n+2+m)-(k+m)$. Тогда получим

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}}(n+1-k)^{\overline{2}} = \sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}}(n+1-k)(n+2-k) =$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{m}}(n+1-k)((n+2+m)-(k+m))=$$

$$=(n+2+m)\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{m}}(n+1-k)-\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{m+1}}(n+1-k)\,.$$

Применяя теперь формулу (11) к вычислению последних двух сумм, получим формулу (12)

$$\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{m}}(n+1-k)^{\overline{2}}=(n+2+m)\frac{n^{\overline{m+2}}}{(m+1)(m+2)}-\frac{n^{\overline{m+3}}}{(m+2)(m+3)}=$$

$$=\frac{n^{\overline{m+3}}}{(m+1)(m+2)}-\frac{n^{\overline{m+3}}}{(m+2)(m+3)}=\frac{2n^{\overline{m+3}}}{(m+1)(m+2)(m+3)}\,.$$

В частном случае $m=2$, получаем

$$\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{2}}(n+1-k)^{\overline{2}}=\frac{n^{\overline{5}}}{30}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{30}\,. \qquad (13)$$

Подставляя (13) в формулу (9), находим сумму $S_4(n)$ [2]

$$S_4(n)=\frac{n(n+1)}{30}\left(6n^3+9n^2+n-1\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. – М.: Мир, 1998. – 703 с.

2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, рядов и произведений. Под ред. А. Джеффри, Д. Цвиллингера. – 7-е изд.: Пер. с англ. под ред. проф. В.В. Максимова. – СПб.: БВХ-Петербург, 2011. – 1232 с.

REFERENCES

1. Graham R., Knuth D., Patashnik O. Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science. 2-nd ed. – Reading, MA: Addison-Wesley Professional, 1994. pp. xiv+657.

2. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.. Table of Integrals, Series, and Products. Editors A. Jeffrey and D. Zwillinger. – 7-th ed.: Translated from Russian by Scripta Technica Inc. – N.Y.: Academic Press, 2007. – 1171 p.

NEW METHOD FOR SUMMATION OF POSITIVE INTEGERS OF THE FOURTH POWERS

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072,
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

The problem of calculating the sums of positive integers of the fourth powers is considered. A new method of calculation based on the use of rising factorial is proposed.
Keywords: Sums of positive integers of the fourth powers, rising factorial.