УДК 517.521

О ВЫЧИСЛЕНИИ СИММЕТРИЧНЫХ СУММ ПЕРВЫХ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Рассмотрена симметричная сумма первых натуральных чисел. Предложен метод её вычисления, основанный на использовании возрастающей факториальной степени.
Ключевые слова: Возрастающая факториальная степень, симметричная сумма первых натуральных чисел, телескопическая сумма

1. Симметричная сумма первых натуральных чисел. Под *симметричной суммой* натуральных чисел мы будем понимать конечную сумму натуральных чисел вида

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n,$$

для которой выполняется условие $\alpha_k = \alpha_{n+1-k}, \quad n \geq 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n$.

Примерами таких сумм являются следующие суммы

$$1+2+3+2+1, \; 1+2+3+3+2+1.$$

Если имеется последовательность натуральных чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n,$$

то не трудно составить симметричную сумму следующего вида

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \alpha_{n+1-k} = \alpha_1 \alpha_n + \alpha_2 \alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} \alpha_2 + \alpha_n \alpha_1.$$

Простейшими примерами являются суммы

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \ldots + (n-2) \cdot 3 + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} k^m (n+1-k)^m = 1^m \cdot n^m + 2^m \cdot (n-1)^m + \ldots + (n-1)^m \cdot 2^m + n^m \cdot 1^m,$$

где m – целое неотрицательное число. Расширяя наше определение симметричной суммы, будем суммы

$$\sum_{k=1}^{n} k^m (n+1-k)^p = 1^m \cdot n^p + 2^m \cdot (n-1)^p + \ldots + (n-1)^m \cdot 2^p + n^m \cdot 1^p \qquad (1)$$

называть симметрическими, даже если целые неотрицательные числа m и p не равны друг другу. Нахождение значения суммы (1) как значения элементарной функции аргументов n, m и p, называется *нахождением или вычислением суммы* (1) в *замкнутом виде*.

2. Вычисление суммы $\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}} (n+1-k)^{\overline{p}}$ в замкнутом виде для частных случаев $p = 0, 1, 2, 3$. Если обычную степень x^k заменить произведением $x^{\overline{k}} = x(x+1)\ldots(x+k-1)$, называемым верхней факториальной степенью [1], то суммирование в замкнутой форме упростится. По этой причине мы будем в этом пункте рассматривать симметричные суммы с верхними факториальными степенями

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}} (n+1-k)^{\overline{p}}. \qquad (2)$$

Пусть $p = 0$, тогда

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{\overline{m}}(k+m) - (k-1)k^{\overline{m}}}{m+1} = \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{n} \left(k^{\overline{m+1}} - (k-1)^{\overline{m+1}} \right).$$

Последняя сумма справа является телескопической и легко вычисляется

$$\sum_{k=1}^{n} \left(k^{\overline{m+1}} - (k-1)^{\overline{m+1}} \right) = \left(1^{\overline{m+1}} - 0^{\overline{m+1}} \right) + \left(2^{\overline{m+1}} - 1^{\overline{m+1}} \right) + \ldots + \left(n^{\overline{m+1}} - (n-1)^{\overline{m+1}} \right) = n^{\overline{m+1}}.$$

Тогда, подставив эту сумму в предыдущую формулу, получим

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}} = \frac{n^{\overline{m+1}}}{m+1}. \qquad (3)$$

Пусть $p=1$, тогда воспользовавшись формулой (3) и тем, что $k^{\overline{m}}(k+m)=k^{\overline{m+1}}$, $(n+m+1)n^{\overline{m+1}}=n^{\overline{m+2}}$, получим

$$\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{m}}(n+1-k)=\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{m}}(n+m+1-(k+m))=(n+m+1)\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{m}}-\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{m+1}}=$$
$$=(n+m+1)\frac{n^{\overline{m+1}}}{m+1}-\frac{n^{\overline{m+2}}}{m+2}=\frac{n^{\overline{m+2}}}{m+1}-\frac{n^{\overline{m+2}}}{m+2}.$$

Отсюда находим

$$\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{m}}(n+1-k)=\frac{n^{\overline{m+2}}}{(m+1)(m+2)}. \tag{4}$$

Пусть $p=2$, тогда воспользовавшись формулой (4) и тем, что $k^{\overline{m}}(k+m)=k^{\overline{m+1}}$, $(n+m+2)n^{\overline{m+2}}=n^{\overline{m+3}}$, получим

$$\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{m}}(n+1-k)^{\overline{2}}=\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{m}}(n+1-k)(n+m+2-(k+m))=$$
$$=(n+m+2)\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{m}}(n+1-k)-\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{m+1}}(n+1-k)=$$
$$(n+m+2)\frac{n^{\overline{m+2}}}{(m+1)(m+2)}-\frac{n^{\overline{m+3}}}{(m+2)(m+3)}=\frac{n^{\overline{m+3}}}{(m+1)(m+2)}-\frac{n^{\overline{m+3}}}{(m+2)(m+3)}.$$

Отсюда находим

$$\sum_{k=1}^{n}k^{\overline{m}}(n+1-k)^{\overline{2}}=\frac{2n^{\overline{m+3}}}{(m+1)(m+2)(m+3)}. \tag{5}$$

Пусть $p=3$, тогда воспользовавшись формулой (5) и тем, что $k^{\overline{m}}(k+m)=k^{\overline{m+1}}$, $(n+m+3)n^{\overline{m+3}}=n^{\overline{m+4}}$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}}(n+1-k)^{\overline{3}} = \sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}}(n+1-k)(n+2-k)(n+m+3-(k+m)) =$$

$$= (n+m+3)\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}}(n+1-k)(n+2-k) - \sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m+1}}(n+1-k)(n+2-k) =$$

$$= \frac{(n+m+3)2n^{\overline{m+3}}}{(m+1)(m+2)(m+3)} - \frac{2n^{\overline{m+4}}}{(m+2)(m+3)(m+4)} =$$

$$= \frac{2n^{\overline{m+4}}}{(m+1)(m+2)(m+3)} - \frac{2n^{\overline{m+4}}}{(m+2)(m+3)(m+4)}.$$

Отсюда находим

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}}(n+1-k)^{\overline{3}} = \frac{3!n^{\overline{m+4}}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}. \qquad (6)$$

3. Вычисление суммы $\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}}(n+1-k)^{\overline{p}}$ в замкнутом виде для общего случая. Из формул (3) – (6) можно сделать вывод, что для всех целых неотрицательных m и p справедлива формула

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}}(n+1-k)^{\overline{p}} = \frac{p!n^{\overline{m+p+1}}}{(m+1)(m+2)...(m+p)(m+p+1)}. \qquad (7)$$

Докажем её по индукции. Для значения $p=0$ формула очевидно верна и совпадет с формулой (3). Пусть формула (7) верна для некоторого значения $p \geq 0$. Докажем её справедливость для случая $p+1$. Воспользовавшись формулой (7) и тем, что $k^{\overline{m}}(k+m) = k^{\overline{m+1}}$, $(n+m+p)n^{\overline{m+p}} = n^{\overline{m+p+1}}$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}}(n+1-k)^{\overline{p+1}} = \sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}}(n+1-k)^{\overline{p}}(n+m+p-(m+k)) =$$

$$= (n+m+p)\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}}(n+1-k)^{\overline{p}} - \sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m+1}}(n+1-k)^{\overline{p}} =$$

$$= \frac{p!n^{\overline{m+p+2}}}{(m+1)(m+2)...(m+p)(m+p+1)} - \frac{p!n^{\overline{m+p+2}}}{(m+2)(m+3)...(m+p+1)(m+p+2)}.$$

Отсюда находим, что формула (7) верна для значения $p+1$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}}(n+1-k)^{\overline{p+1}} = \frac{(p+1)!n^{\overline{m+p+2}}}{(m+1)(m+2)...(m+p)(m+p+2)}.$$

Следовательно, по индукции формула (7) справедлива для всех целых неотрицательных p.

Заключение. Рассмотрена симметричная сумма первых натуральных чисел. Предложен метод её вычисления, основанный на использовании возрастающей факториальной степени. Автор надеется, что в дальнейшем эти методы позволят получить значения сумм первых натуральных чисел одинаковых степеней в самом общем случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. – М.: Мир, 1998. – 703 с.

REFERENCES

1. Graham R., Knuth D., Patashnik O. Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science. 2-nd ed. – Reading, MA: Addison-Wesley Professional, 1994. pp. xiv+657.

THE COMPUTATION OF THE SYMMETRIC SUMS OF THE FIRST NATURAL NUMBERS

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072,
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

Symmetric sums of the first natural numbers are considered. The method of calculation, based on the use of rising factorial and telescopic sum, is proposed.
Keywords: Rising factorial, symmetric sums of the first natural numbers, telescoping sum.