УДК 517.521

# *НОВЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ СУММЫ ОДИНАКОВЫХ СТЕПЕНЕЙ ПЕРВЫХ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ*

**И.В. ТЕРЕЩЕНКО**

*Кубанский государственный технологический университет*
*350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2*
*электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru*

Рассмотрена сумма одинаковых степеней первых натуральных чисел. Предложен новый метод её вычисления, основанный на использовании возрастающей факториальной степени. Приведены примеры вычисления сумм одинаковых степеней первых натуральных чисел вплоть до показателя степени равного семи.

**Ключевые слова:** Возрастающая факториальная степень, сумма одинаковых степеней натуральных чисел

**1. Сумма одинаковых степеней первых натуральных чисел.** Поставим перед собой задачу разыскания суммы одинаковых степеней первых $n$ натуральных чисел

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + (n-1)^k + n^k \ . \qquad (1)$$

Если $k=0$, то очевидно, что $S_0(n) = n$. Переписав сумму (1) в обратном порядке и сложив её с исходной суммой, получим

$$2S_k(n) = \left[1^k + n^k\right] + \left[2^k + (n-1)^k\right] + \ldots + \left[(n-1)^k + 2^k\right] + \left[n^k + 1^k\right]. \qquad (2)$$

Если $k=1$, то в формуле (2) все суммы в скобках одинаковы и равны $n+1$. Отсюда находим, что $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать случай $k \geq 2$.

Перепишем сумму в формуле (2) через знак суммирования

$$S_k(n) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\left[m^k + (n+1-m)^k\right], \quad k \geq 2. \qquad (3)$$

Каждую сумму $\left[m^k + (n+1-m)^k\right]$, $m = 1,2,\ldots,n$ дополним до $k$-й степени бинома $\left[m + (n+1-m)\right]^k = (n+1)^k, m = 1,2,\ldots,n$, прибавляя и вычитая в формуле (3), сумму

$$\sum_{s=1}^{k-1} C_k^s m^{k-s} (n+1-m)^s .$$

Тогда получим основную формулу для наших исследований

$$S_k(n) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\left[ m^k + \sum_{s=1}^{k-1} C_k^s m^{k-s}(n+1-m)^s + (n+1-m)^k \right] -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\sum_{s=1}^{k-1} C_k^s m^{k-s}(n+1-m)^s = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}(n+1)^k - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\sum_{s=1}^{k-1} C_k^s m^{k-s}(n+1-m)^s,$$

или

$$S_k(n) = \frac{n(n+1)^k}{2} - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k-1} C_k^s \sum_{m=1}^{n} m^{k-s}(n+1-m)^s,\ k \ge 2. \tag{4}$$

**2. Вычисление суммы $S_k(n)$ для значений $k = 2, 3, 4, 5, 6$ и $7$.** Пусть $k = 2$. Тогда из формулы (4) получаем

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{C_2^1}{2}\sum_{m=1}^{n} m(n+1-m) = \frac{n(n+1)^2}{2} - \sum_{m=1}^{n} m(n+1-m). \tag{5}$$

Используя возрастающий факториал [1]

$$x^{\overline{k}} = \begin{cases} 1, & k = 0, \quad x \ne 0, \\ x, & k = 1, \\ x(x+1)\ldots(x+k-1), & \end{cases}$$

в предыдущей статье «О вычислении симметричных сумм первых натуральных чисел» этого сборника мы вычислили, что для целых неотрицательных чисел $k$ и $p$ справедливо равенство

$$\sum_{m=1}^{n} m^{\overline{k}} (n+1-m)^{\overline{p}} = \frac{p!\, n^{\overline{k+p+1}}}{(k+1)(k+2)\ldots(k+p)(k+p+1)}. \tag{6}$$

Для показателей степени $k = 1$ и $p = 1$ отсюда находим

$$\sum_{m=1}^{n} m(n+1-m) = \frac{n^{\overline{3}}}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (5), получим

$$S_2(n)=\frac{n(n+1)^2}{2}-\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{8}$$

Пусть $k=3$. Тогда из формул (4) и (7) получаем

$$S_3(n)=\frac{n(n+1)^3}{2}-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\left(C_3^1 m^2(n+1-m)+C_3^2 m(n+1-m)^2\right)=$$
$$=\frac{n(n+1)^3}{2}-\frac{3}{2}\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)(m+(n+1-m))=$$
$$=\frac{n(n+1)^3}{2}-\frac{3(n+1)}{2}\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)=\frac{n(n+1)^3}{2}-\frac{n(n+1)^2(n+2)}{4}.$$

После очевидных упрощений приходим к значению суммы

$$S_3(n)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{9}$$

Можно дать другой вариант вывода формулы (9), если заметить, что

$$C_3^1=C_3^2=3 \text{ и } \sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)=\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^2.$$

Тогда

$$S_3(n)=\frac{n(n+1)^3}{2}-3\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m).$$

Так как

$$\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)=\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^2=(n+1)\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)-\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m),$$

то

$$\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)=\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^2=\frac{(n+1)}{2}\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m). \tag{10}$$

Отсюда опять приходим к формуле (9)

$$S_3(n)=\frac{n(n+1)^3}{2}-3\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)=\frac{n(n+1)^3}{2}-\frac{3}{2}\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Пусть $k=4$. Тогда из формул (4) и (7) получаем

$$S_4(n)=\frac{n(n+1)^4}{2}-\frac{\sum_{m=1}^{n}\left(C_4^1m^3(n+1-m)+C_4^2m^2(n+1-m)^2+C_4^3m(n+1-m)^3\right)}{2}=$$
$$=\frac{n(n+1)^4}{2}-\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)(2m^2+3m(n+1-m)+2(n+1-m))=$$
$$=\frac{n(n+1)^4}{2}-2\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)\left((m+(n+1-m))^2-\frac{m(n+1-m)}{2}\right).$$

Отсюда после очевидных упрощений приходим к

$$S_4(n)=\frac{n(n+1)^4}{2}-2(n+1)^2\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)+\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^2. \qquad (11)$$

Подставляя из (7) значение последней суммы, получим

$$S_4(n)=\frac{n(n+1)^3(n-1)}{6}+\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^2\ . \qquad (12)$$

Вычислим теперь важную формулу $\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^2$, используя формулы (6), (7), (10), определение возрастающего факториала, а так же формулы $m^2=m(m+1)-m=m^{\overline{2}}-m$, $m^{\overline{2}}(m+3)=m^{\overline{3}}$.

$$\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^2=\sum_{m=1}^{n}m^{\overline{2}}(n+1-m)^2-\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^2=$$

$$=\sum_{m=1}^{n}m^{\overline{2}}(n+1-m)(n+3-(m+2))-\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)=$$

$$=(n+3)\sum_{m=1}^{n}m^{\overline{2}}(n+1-m)-\sum_{m=1}^{n}m^{\overline{3}}(n+1-m)-\frac{(n+1)}{2}\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)=$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)^2}{12}-\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{20}-\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}=$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n^2+2n+2)}{30}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{m=1}^{n} m^2(n+1-m)^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(n^2+2n+2)}{30}. \tag{13}$$

Подставляя формулу (13) в формулу (12), получим

$$S_4(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}. \tag{14}$$

Можно дать другой вариант вывода формулы (14), если заметить, что

$$C_4^1 = C_4^3 = 4 \text{ и } \sum_{m=1}^{n} m^3(n+1-m) = \sum_{m=1}^{n} m(n+1-m)^3.$$

Тогда, используя формулы (4) и (10), получим

$$S_4(n) = \frac{n(n+1)^4}{2} - \sum_{m=1}^{n}\left(4m(n+1-m)^3 + 3m^2(n+1-m)^2\right) =$$

$$= \frac{n(n+1)^4}{2} - 3\sum_{m=1}^{n} m^2(n+1-m)^2 - 4\sum_{m=1}^{n} m(n+1-m)^2(n+1-m) =$$

$$= \frac{n(n+1)^4}{2} + \sum_{m=1}^{n} m^2(n+1-m)^2 - 4(n+1)\sum_{m=1}^{n} m^2(n+1-m) =$$

$$= \frac{n(n+1)^4}{2} - 2(n+1)^2\sum_{m=1}^{n} m(n+1-m) + \sum_{m=1}^{n} m^2(n+1-m)^2.$$

То есть вновь пришли к формуле (11), из которой следует, что значение суммы $S_4(n)$ даётся формулой (14).

Значения сумм $S_3(n)$ и $S_4(n)$ мы вычислили двумя, как оказалось, равносильными способами. Поэтому другие суммы мы будем вычислять только одним способом.

Пусть $k=5$. Тогда из формулы (4) получаем

$$S_5(n) = \frac{n(n+1)^5}{2} - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\Big(C_5^1 m^4(n+1-m) + C_5^2 m^3(n+1-m)^2 + C_5^3 m^2(n+1-m)^3 +$$

$$+ C_5^4 m(n+1-m)^4\Big) = \frac{n(n+1)^5}{2} - C_5^3\sum_{m=1}^{n} m^2(n+1-m)^3 - C_5^4\sum_{m=1}^{n} m(n+1-m)^4.$$

Здесь $C_5^3 = 10$, $C_5^4 = 5$. Таким образом, получаем

$$S_5(n)=\frac{n(n+1)^5}{2}-10\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^3-5\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^4\,. \qquad (15)$$

Далее из равенства

$$\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^3=(n+1)\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^2-\sum_{m=1}^{n}m^3(n+1-m)^2=$$
$$=(n+1)\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^2-\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^3$$

следует, что

$$\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^3=\frac{n+1}{2}\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^2\,. \qquad (16)$$

Теперь преобразуем вторую сумму в формуле (15)

$$\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^4=(n+1)\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^3-\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^3=$$
$$=(n+1)^2\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^2-(n+1)\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^2-\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^3.$$

Подставляя сюда значение первой суммы из формулы (10) и значение третьей суммы из формулы (16), получим

$$\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^4=\frac{(n+1)^3}{2}\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)-\frac{3n+3}{2}\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^2. \qquad (17)$$

Подставляя значения сумм из формул (16) и (17) в формулу (15), находим сумму $S_5(n)$

$$S_5(n)=\frac{n(n+1)^5}{2}-\frac{5(n+1)^3}{2}\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)+\frac{5(n+1)}{2}\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^2\,.$$

Используя формулы (7) и (13), отсюда получаем

$$S_5(n)=\frac{n(n+1)^5}{2}-\frac{5n(n+1)^4(n+2)}{12}+\frac{n(n+1)^2(n+2)(n^2+2n+2)}{12}$$

или

$$S_5(n)=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}\,. \qquad (18)$$

Пусть $k=6$. Тогда из формулы (4) получаем

$$S_6(n)=\frac{n(n+1)^6}{2}-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\Big(C_6^1m^5(n+1-m)+C_6^2m^4(n+1-m)^2+C_6^3m^3(n+1-m)^3+$$
$$+C_6^4m^2(n+1-m)^4+C_6^5m(n+1-m)^5\Big).$$

Так как

$$\frac{1}{2}C_6^3=10,\ C_6^1=C_6^5=6,\ C_6^2=C_6^4=15,$$

$$\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^5=\sum_{m=1}^{n}m^5(n+1-m),\ \sum_{m=1}^{n}m^4(n+1-m)^2=\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^4,$$

то отсюда получаем

$$S_6(n)=\frac{n(n+1)^6}{2}-10\sum_{m=1}^{n}m^3(n+1-m)^3-15\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^4-$$
$$-6\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^5. \qquad (19)$$

Теперь преобразуем третью сумму в формуле (19)

$$\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^5=(n+1)\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^4-\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^4.$$

Подставив её в формулу (19), получим

$$S_6(n)=\frac{n(n+1)^6}{2}-10\sum_{m=1}^{n}m^3(n+1-m)^3-9\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^4-$$
$$-6(n+1)\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^4. \qquad (20)$$

Далее имеем

$$\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^4=(n+1)\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^3-\sum_{m=1}^{n}m^3(n+1-m)^3.$$

Подставляя последнюю сумму в формулу (20), получаем

$$S_6(n)=\frac{n(n+1)^6}{2}-\sum_{m=1}^{n}m^3(n+1-m)^3-9(n+1)\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^3-$$

$$-6(n+1)\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^4 .$$

Подставляя значения второй и третьей сумм из формул (16) и (17), находим сумму $S_6(n)$ в виде

$$S_6(n)=\frac{n(n+1)^6}{2}-\sum_{m=1}^{n}m^3(n+1-m)^3+\frac{9}{2}(n+1)^2\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^2-$$

$$-3(n+1)^4\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m).$$

Используя формулы (7) и (13), отсюда приходим к сумме

$$S_6(n)=\frac{n(n+1)^3(3n^3+2n^2-2n+2)}{20}-\sum_{m=1}^{n}m^3(n+1-m)^3 . \tag{21}$$

Для вычисления сумму $\sum_{m=1}^{n}m^3(n+1-m)^3$, воспользуемся равенствами

$$m^3=m^{\overline{3}}-3m^{\overline{2}}+m^{\overline{1}}\ ,\ m^3=(n+1-m)^{\overline{3}}-3(n+1-m)^{\overline{2}}+(n+1-m)^{\overline{1}}.$$

Тогда получим

$$\sum_{m=1}^{n}m^3(n+1-m)^3=\sum_{m=1}^{n}m^{\overline{3}}(n+1-m)^{\overline{3}}-6\sum_{m=1}^{n}m^{\overline{3}}(n+1-m)^{\overline{2}}+$$

$$+2\sum_{m=1}^{n}m^{\overline{3}}(n+1-m)^{\overline{1}}+9\sum_{m=1}^{n}m^{\overline{2}}(n+1-m)^{\overline{2}}-6\sum_{m=1}^{n}m^{\overline{2}}(n+1-m)^{\overline{1}}+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}m^{\overline{1}}(n+1-m)^{\overline{1}}.$$

Суммы в правой части вычислим по формуле (6). Тогда получим

$$\sum_{m=1}^{n}m^3(n+1-m)^3=\frac{3!n^{\overline{7}}}{4\cdot5\cdot6\cdot7}-6\frac{2!n^{\overline{6}}}{4\cdot5\cdot6}+2\frac{1!n^{\overline{5}}}{4\cdot5}+9\frac{2!n^{\overline{6}}}{3\cdot4\cdot5}-6\frac{1!n^{\overline{4}}}{3\cdot4}+\frac{n^{\overline{3}}}{6}$$

или

$$\sum_{m=1}^{n} m^3(n+1-m)^3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{420}\left(3n^4+12n^3+21n^2+18n+16\right). \qquad (22)$$

Подставив сумму (22), в формулу (21), получим

$$S_6(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{42}\left(3n^4+6n^3-3n+1\right).$$

Наконец, пусть $k=7$. Тогда из формулы (4) получаем

$$S_7(n) = \frac{n(n+1)^7}{2} - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\Big(C_7^1 m^6(n+1-m) + C_7^2 m^5(n+1-m)^2 + C_7^3 m^4(n+1-m)^3 +$$
$$+ C_7^4 m^3(n+1-m)^4 + C_7^5 m^2(n+1-m)^5 + C_7^6 m(n+1-m)^6\Big).$$

Так как

$$C_7^1 = C_7^6 = 7,\ C_7^2 = C_7^5 = 21,\ C_7^3 = C_7^4 = 35$$

$$\sum_{m=1}^{n} m(n+1-m)^6 = \sum_{m=1}^{n} m^6(n+1-m),\ \sum_{m=1}^{n} m^5(n+1-m)^2 = \sum_{m=1}^{n} m^2(n+1-m)^5,$$

$$\sum_{m=1}^{n} m^4(n+1-m)^3 = \sum_{m=1}^{n} m^3(n+1-m)^4$$

то отсюда получаем

$$S_7(n) = \frac{n(n+1)^7}{2} - 35\sum_{m=1}^{n} m^3(n+1-m)^4 - 21\sum_{m=1}^{n} m^2(n+1-m)^5 -$$

$$-7\sum_{m=1}^{n} m(n+1-m)^6. \qquad (23)$$

Теперь преобразуем третью сумму в формуле (23)

$$\sum_{m=1}^{n} m(n+1-m)^6 = (n+1)\sum_{m=1}^{n} m(n+1-m)^5 - \sum_{m=1}^{n} m^2(n+1-m)^5.$$

Подставив её в формулу (23), получим

$$S_7(n) = \frac{n(n+1)^7}{2} - 35\sum_{m=1}^{n} m^3(n+1-m)^4 - 14\sum_{m=1}^{n} m^2(n+1-m)^5 -$$

$$-7(n+1)\sum_{m=1}^{n} m(n+1-m)^5 \ . \tag{24}$$

Далее имеем

$$\sum_{m=1}^{n} m^2(n+1-m)^5 = (n+1)\sum_{m=1}^{n} m^2(n+1-m)^4 - \sum_{m=1}^{n} m^3(n+1-m)^4 \ .$$

Подставляя последнюю сумму в формулу (24), получаем

$$S_7(n) = \frac{n(n+1)^7}{2} - 21\sum_{m=1}^{n} m^3(n+1-m)^4 - 14(n+1)\sum_{m=1}^{n} m^2(n+1-m)^4 -$$

$$-7(n+1)\sum_{m=1}^{n} m(n+1-m)^5 \ . \tag{25}$$

Так как

$$\sum_{m=1}^{n} m(n+1-m)^5 = (n+1)\sum_{m=1}^{n} m(n+1-m)^4 - \sum_{m=1}^{n} m^2(n+1-m)^4 \ ,$$

то, подставив эту сумму в (25), получим

$$S_7(n) = \frac{n(n+1)^7}{2} - 21\sum_{m=1}^{n} m^3(n+1-m)^4 - 7(n+1)\sum_{m=1}^{n} m^2(n+1-m)^4 -$$

$$-7(n+1)^2\sum_{m=1}^{n} m(n+1-m)^4 - . \tag{26}$$

Далее, из равенств

$$\sum_{m=1}^{n} m^3(n+1-m)^4 = (n+1)\sum_{m=1}^{n} m^3(n+1-m)^3 - \sum_{m=1}^{n} m^4(n+1-m)^3 \ ,$$

$$\sum_{m=1}^{n} m^4(n+1-m)^3 = \sum_{m=1}^{n} m^3(n+1-m)^4 \ ,$$

следует, что

$$\sum_{m=1}^{n} m^3(n+1-m)^4 = \frac{n+1}{2}\sum_{m=1}^{n} m^3(n+1-m)^3 \ .$$

Подставляя в (26), получим

$$S_7(n)=\frac{n(n+1)^7}{2}-21\frac{n+1}{2}\sum_{m=1}^{n}m^3(n+1-m)^3-7(n+1)\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^4-$$

$$-7(n+1)^2\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^4-. \tag{27}$$

Далее, имеем

$$\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^4=(n+1)\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^3-\sum_{m=1}^{n}m^3(n+1-m)^3 .$$

Подставляя эту сумму в (27), находим

$$S_7(n)=\frac{n(n+1)^7}{2}-7\frac{n+1}{2}\sum_{m=1}^{n}m^3(n+1-m)^3-7(n+1)^2\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^3-$$

$$-7(n+1)^2\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^4 . \tag{28}$$

Так как

$$\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^4=(n+1)\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^3-\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^3 ,$$

$$\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^3=\frac{n+1}{2}\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^2 ,$$

то, подставляя в (27), получим

$$S_7(n)=\frac{n(n+1)^7}{2}-7\frac{n+1}{2}\sum_{m=1}^{n}m^3(n+1-m)^3-7(n+1)^3\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^3 . \tag{29}$$

Так как

$$\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^2=\frac{n+1}{2}\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m),$$

$$\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^3=(n+1)\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)^2-\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^2=$$

$$=\frac{(n+1)^2}{2}\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)-\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^2 ,$$

то, подставляя эти суммы в формулу (29), найдём

$$S_7(n)=\frac{n(n+1)^7}{2}-7\frac{n+1}{2}\sum_{m=1}^{n}m^3(n+1-m)^3+7(n+1)^3\sum_{m=1}^{n}m^2(n+1-m)^2-$$

$$-7\frac{(n+1)^5}{2}\sum_{m=1}^{n}m(n+1-m)\,. \qquad (30)$$

Подставив суммы (7), (13) и (22), в формулу (30), получим

$$S_7(n)=\frac{n^2(n+1)^2}{24}(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)\quad .$$

**Заключение.** Предложены новые методы вычисления сумм одинаковых степеней первых натуральных методов. Приведены примеры вычислений для степеней 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Автор надеется, что в дальнейшем эти методы позволят получить значения рассматриваемых сумм в самом общем случае и выявить их новые свойства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. – М.: Мир, 1998. – 703 с.

REFERENCES

2. Graham R., Knuth D., Patashnik O. Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science. 2-nd ed. – Reading, MA: Addison-Wesley Professional, 1994. pp. xiv+657.

*NEW METHOD FOR SUMMATION OF POSITIVE INTEGERS OF THE SAME POWERS*

**I.V. TERESHCHENKO**

*Kuban State Technological University*
*2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072,*
*e-mail: tereshchenko57@rambler.ru*

The problem of calculating the sums of positive integers of the same powers is considered. A new method of calculation, based on the use of rising factorial, is proposed. The examples of such calculations are given. The examples of sums calculation of positive integers of the same powers of the first natural numbers up to the power equal to seven are given.
Keywords: Sums of positive integers of the same powers, rising factorial.