УДК 517.521

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВОЗРАСТАЮЩИХ ФАКТОРИАЛЬНЫХ СТЕПЕНЕЙ ДЛЯ СУММИРОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ РЯДОВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Рассмотрена возрастающая факториальная степень и её свойства. Предложен новый метод вычисления сумм натуральных чисел, содержащих возрастающую факториальную степень. Приведены примеры вычисления таких сумм.

Ключевые слова: Возрастающая факториальная степень, сумма натуральных чисел.

1. Возрастающая факториальная степень [1]. *Возрастающей факториальной степенью* целого неотрицательного порядка $m \geq 2$ вещественного или комплексного числа z называют произведение, обозначаемое символом $z^{\overline{m}}$, $z^{[m]}$ или $z^{(m)}$, равное

$$z^{\overline{m}} = z(z+1)(z+2)\ldots(z+m-2)(z+m-1)\,. \qquad (1)$$

По определению полагают, что

$$z^{\overline{0}} = 1,\ z \neq 0 \text{ и } z^{\overline{1}} = z\,. \qquad (2)$$

Укажем на некоторые полезные свойства возрастающей факториальной степени

1) *Теорема суммирования*

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}} = \frac{n^{\overline{m+1}}}{m+1},\ m = 0, 1, 2, \ldots,\ n = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (3)$$

Доказательство. Из определения (1), (2) возрастающей факториальной степени следует, что

$$k^{\overline{m}} = k(k+1)(k+2)\ldots(k+m-2)(k+m-1) =$$

$$= \frac{k(k+1)\ldots(k+m-1)(k+m)-(k-1)k\ldots(k+m-2)(k+m-1)}{m+1}.$$

Тогда сумма

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k(k+1)\ldots(k+m-1)(k+m)}{m+1} - \frac{(k-1)k\ldots(k+m-2)(k+m-1)}{m+1}\right),$$

будучи телескопической, будет равна

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}} = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)(n+m)}{m+1} = \frac{n^{\overline{m+1}}}{m+1}.$$

Тем самым, свойство 1) доказано.

В частности, из формулы (3), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{1}} = \frac{n^{\overline{2}}}{2} \text{ или } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{2}} = \frac{n^{\overline{3}}}{3} \text{ или } \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

2) *Теорема произведения*. Для любого комплексного числа x и любых целых неотрицательных чисел n и m верно равенство (если $x = 0$, то $n \geq 1$)

$$x^{\overline{n}}(x+n)^{\overline{m}} = x^{\overline{n+m}}. \quad (4)$$

Доказательство. Согласно определению (1), (2) возрастающей факториальной степени получаем

$$x^{\overline{n}}(x+n)^{\overline{m}} = x(x+1)\ldots(x+n-1)(x+n)(x+n+1)\ldots(x+n+m-1) = x^{\overline{n+m}},$$

что и следовало доказать.

3) *Факториальный бином*. Для любых комплексных чисел x и y и любого натурального числа n верно равенство

$$\left(x+y\right)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{\overline{n-k}} y^{\overline{k}}, \quad (5)$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ - биноминальный коэффициент.

Доказательство. Для значения $n=1$ формула (5) верна, так как согласно определению (2) и формуле (4)

$$\left(x+y\right)^{\overline{1}} = x+y = C_1^0 x^{\overline{1}} y^{\overline{0}} + C_1^1 x^{\overline{0}} y^{\overline{1}}.$$

Пусть формула (5) верна для всех натуральных чисел от 1 до *n*. Покажем, что тогда она верна для натурального числа $n+1$. Действительно, согласно определению (1) и теореме произведения, имеем

$$(x+y)^{\overline{n+1}} = (x+y)^{\overline{n}}(x+y+n).$$

Так как по предложению индукции справедлива формула (5), то из предыдущей формулы имеем

$$(x+y)^{\overline{n+1}} = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{\overline{n-k}} y^{\overline{k}}\right)((x+n-k)+(y+k)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{\overline{n-k}}(x+n-k) y^{\overline{k}} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{\overline{n-k}} y^{\overline{k}}(y+k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{\overline{n+1-k}} y^{\overline{k}} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{\overline{n-k}} y^{\overline{k+1}} = C_n^0 x^{\overline{n+1}} y^{\overline{0}} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{\overline{n+1-k}} y^{\overline{k}} +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^{\overline{n-k}} y^{\overline{k+1}} + C_n^n x^{\overline{0}} y^{\overline{n+1}} = C_{n+1}^0 x^{\overline{n+1}} y^{\overline{0}} + \sum_{k=1}^{n}\left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) x^{\overline{n+1-k}} y^{\overline{k}} + C_{n+1}^{n+1} x^{\overline{0}} y^{\overline{n+1}}.$$

Поскольку $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ для натуральных значений $1 \le k \le n$, то

$$(x+y)^{\overline{n+1}} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^{\overline{n+1-k}} y^{\overline{k}}.$$

Отсюда, по заключению математической индукции, следует, что формула факториального бинома верна для всех натуральных значений n.

2. Вычисление сумм вида $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}}(n+1-k)}$. В предыдущей статье автора «Использование телескопических рядов для суммирования натуральных чисел одинаковых степеней» этого выпуска была вычислена сумма следующего вида

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \tag{6}$$

В этом пункте мы приведём новый способ вычисления более общих сумм

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}}(n+1-k), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \tag{7}$$

для которых сумма (6) является частным случаем. Для этого перепишем сумму (7) следующим образом

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}}(n+1-k) = \sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}}((n+1+m)-(k+m)) =$$

$$= (n+1+m)\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}} - \sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}}(k+m) = (n+1+m)\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}} - \sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m+1}}.$$

Используя формулу (3), отсюда получим

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}}(n+1-k) = (n+1+m)\frac{n^{\overline{m+1}}}{m+1} - \frac{n^{\overline{m+2}}}{m+2} = \frac{n^{\overline{m+2}}}{m+1} - \frac{n^{\overline{m+2}}}{m+2} = \frac{n^{\overline{m+2}}}{(m+1)(m+2)}.$$

Отсюда находим, что

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}}(n+1-k) = \frac{n^{\overline{m+2}}}{(m+1)(m+2)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots . \tag{8}$$

Если положить $m = 1$, то из (8) следует как частный случай формула (6). Если взять теперь $m = 2$, то из (8) получим, что

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{2}}(n+1-k) = \frac{n^{\overline{4}}}{12} \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(n+1-k) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{12}.$$

Так как $k^2 = k(k+1) - k = k^{\overline{2}} - k^{\overline{1}}$, то из (6) и (8) находим, что

$$\sum_{k=1}^{n} k^2(n+1-k) = \sum_{k=1}^{n} k^{\overline{2}}(n+1-k) - \sum_{k=1}^{n} k^{\overline{1}}(n+1-k) = \frac{n^{\overline{4}}}{12} - \frac{n^{\overline{3}}}{6} = \frac{n \cdot (n+1)^2(n+2)}{12}.$$

Заключение. Предложен новый метод вычисления сумм натуральных чисел, содержащих возрастающую факториальную степень. Приведены примеры вычисления таких сумм. Автор надеется, что в дальнейшем эти методы позволят получить значения рассматриваемых сумм в самом общем случае и выявить их новые свойства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. – М.: Мир, 1998. – 703 с.

REFERENCES

1. Graham R., Knuth D., Patashnik O. Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science. 2-nd ed. – Reading, MA: Addison-Wesley Professional, 1994. pp. xiv+657.

USING RISING FACTORIAL FOR SUMMATION OF POSITIVE INTEGERS OF THE SAME POWERS

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072,
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

Rising factorial and its properties are considered. A new method of calculating the sums of positive integers containing rising factorial is proposed. The examples of such sums calculation are given.
Keywords: Rising factorial, sum of the natural numbers.