УДК 517.521

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕЛЕСКОПИЧЕСКИХ РЯДОВ ДЛЯ СУММИРОВАНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ОДИНАКОВЫХ СТЕПЕНЕЙ

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Рассмотрена задача вычисления сумм натуральных чисел одинаковых степеней. Предложен новый метод их вычисления, основанный на использовании телескопических рядов. Показано, как для данной суммы составить телескопический ряд. Приведены примеры вычисления таких сумм.
Ключевые слова: Сумма натуральных чисел одинаковых степеней, телескопический ряд, Карл Гаусс, Сринивас Рамануджан

1. Сумма первых натуральных чисел. Рассмотрим *натуральный ряд чисел*

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots \ .$$

Поставим перед собой задачу разыскания суммы первых n чисел

$$S_1(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \,. \qquad (1)$$

Запишем её в обратном порядке

$$S_1(n) = n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1 \ . \qquad (2)$$

Сложив почленно две суммы (1) и (2), получим

$$2S_1(n) = \left[n+1\right] + \left[(n-1)+2\right] + \left[(n-2)+3\right] + \dots + \left[2+(n-1)\right] + \left[1+n\right].$$

Так как любая сумма в квадратных скобках равна $n+1$, а таких скобок очевидно, n, то правая часть равна $n(n+1)$ и мы имеем

$$2S_1(n) = n(n+1) \,,$$

откуда

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (3)$$

Существует красивая легенда [1, 2] о том, как в 1787 году, находясь в третьем классе Екатерининской народной школы, десятилетний Карл Гаусс, будущий «король математиков», мгновенно решил задачу о вычислении суммы первых ста натуральных чисел, предложенную его учителем Бюттнером. Способ решения Гауссом предложенной задачи полностью следует изложенному выше методу

$$2S = [1+100]+[2+99]+\ldots+[99+2]+[100+1] = \underbrace{101+\ldots+101}_{100\ \text{раз}} = 101\cdot 100.$$

Откуда

$$S = \frac{101\cdot 100}{2} = 5050.$$

К сожалению, большинство легенд о юном Гауссе были рассказаны либо его матерью, либо им самим в старости и не имеют подтверждения свидетельствами других очевидцев. Так же как и знаменитое утверждение Гаусса о том, что в возрасте 3-х лет он раньше научился считать, чем читать.

Однако существует другой способ нахождения суммы (3), найденный автором статьи в начале июня 2014 года во время чтения статьи американского математика Бирдона [3] о суммах степеней целых чисел. Впечатленный в этой статье рассказом о том, как в 1654 году Паскаль получил реккуретное соотношение для сумм натуральных чисел одинаковых степеней при помощи телескопических сумм, автор, как и Гаусс, мгновенно получил, складывая равенства

$$\frac{(n+1)n}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n,$$

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n-1,$$

…………………………,

$$\frac{3\cdot 2}{2}-\frac{2\cdot 1}{2}=2,$$

$$\frac{2\cdot 1}{2}-\frac{1\cdot 0}{2}=1,$$

что

$$S_1(n)=n+(n-1)+...+2+1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Сумма первых квадратов натуральных чисел. Поставим теперь перед собой задачу разыскания суммы квадратов первых n чисел

$$S_2(n)=1^2+2^2+3^2+...+(n-1)^2+n^2\ . \tag{4}$$

Конечно, первое, что приходит на ум, попробовать использовать приём юного Гаусса, то есть переписать сумму (4) в другом порядке

$$S_2(n)=n^2+(n-1)^2+...+3^2+2^2+1^2\ .$$

и сложить почленно обе суммы

$$2S_2(n)=\left[n^2+1^2\right]+\left[(n-1)^2+2^2\right]+...+\left[2^2+(n-1)^2\right]+\left[1^2+n^2\right].$$

Однако суммы в квадратных скобках теперь не равны друг другу. Смог ли юный Гаусс решить такую задачу мы, наверняка, никогда не узнаем, так как, скорее всего, школьный учитель Бюттнер не давал своим ученикам таких непростых задач.

С задачей, по мнению автора, можно справиться, если слева и справа от знака равно добавить к каждой скобке удвоенное произведение слагаемых (этот метод совершенно оригинальный и никогда ранее не встречался)

$$2S_2(n)+2n\cdot 1+2(n-1)\cdot 2+2(n-2)\cdot 3+...+2\cdot 2(n-1)+2\cdot 1\cdot n=$$

$$=\left[n^2+2n\cdot 1+1^2\right]+\left[(n-1)^2+2\cdot(n-1)\cdot 2+2^2\right]+\left[(n-2)^2+2\cdot(n-2)\cdot 3+3^2\right]+$$

$$+\ldots+\left[2^2+2\cdot 2\cdot(n-1)+(n-1)^2\right]+\left[1^2+2\cdot 1\cdot n+n^2\right].$$

Теперь каждая квадратная скобка равна $(n+1)^2$. Таких скобок всего n. Отсюда получаем, что

$$S_2(n)=\frac{n(n+1)^2}{2}-\left[n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+(n-2)\cdot 3+\ldots+2\cdot(n-1)+1\cdot n\right]. \quad (5)$$

Говорят, что у некоторых людей очень развита интуиция. Они могут запросто в уме без всяких усилий, имея минимальное математическое образование, получать сложные формулы. В пример можно привести индийского гения – математика Сринива́са Рамануджана [2, 4]. Сам Рамануджан говорил, что формулы ему во сне внушает богиня Намагири. Можно не сомневаться, что богиня нашептала бы Рамануджану формулу

$$S=n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+(n-2)\cdot 3+\ldots+2\cdot(n-1)+1\cdot n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \quad (6)$$

Как же доказать, что богиня права? Методом математической индукции? Возможно. Хотя, конечно, сумму, стоящую в левой части равенства (6) проще получить следующим образом (метод декомпозиции или метод разбиения на известные суммы). Выпишем цепочки равенств

$$n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1=\frac{(n+1)n}{2},$$

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1=\frac{n(n-1)}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$2+1=\frac{3\cdot 2}{2},$$

$$1 = \frac{2 \cdot 1}{2}.$$

Складывая почленно левые и правые части этих равенств (всего их n), получим сумму, стоящую в левой части формулы (6)

$$S = n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + ... + 2 \cdot (n-1) + 1 \cdot n = \frac{(n+1)n}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + ... + \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 1}{2}. \quad (7)$$

Сумма в левой части формулы (7) является телескопической. Действительно, так как

$$\frac{(k+1)k}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} - \frac{(k-1)k(k+1)}{6},$$

то, полагая теперь последовательно $k = n, n-1, ..., 2, 1$, получим

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\frac{(n-1)n(n+1)}{6} - \frac{(n-2)(n-1)n}{6} = \frac{(n-1)n}{2},$$

………………………………………….,

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{6} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{2 \cdot 3}{2},$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} - 0 = 1^2.$$

Складывая почленно теперь уже эту цепочку равенств, получим сумму в квадратных скобках, стоящую в правой части равенства (5)

$$n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + ... + 2 \cdot (n-1) + 1 \cdot n =$$

$$= \frac{(n+1)n}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + ... + \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \quad (8)$$

Теперь, подставляя в (5) ее значение, немедленно находим точную величину суммы (4)

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (9)$$

Приведём ещё один способ вычисления суммы (4), близкий к способу, изложенному выше, и основанному на использовании телескопических сумм. Так как

$$\frac{x(x+1)(2x+1)}{6} - \frac{(x-1)x(2x-1)}{6} = x^2, \qquad (10)$$

то, полагая в формуле (10) последовательно $x = n, n-1, ..., 1$, получим

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = n^2,$$

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6} = (n-1)^2,$$

…………………………..………………..,

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} - \frac{0\cdot 1\cdot 2}{6} = 1^2.$$

Складывая почленно эту цепочку равенств, находим точную величину суммы (9)

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Как же автор догадался воспользоваться формулой (10)? Понятно, что, будучи человеком неверующим, он не может объяснить свои догадки «внушением» какой-либо богини, приходящей к нему во сне или наяву в виде очень умной женщины, как фантастически объяснял свои открытия

Рамануджан. Не был он и «чудо-ребёнком» как Карл Гаусс, который забавлял герцога Брауншвейгского, своего господина и покровителя, проделывая в уме сложнейшие арифметические вычисления.

Остаётся одно, объяснить всё *озарением и вдохновением*. Почти как у неизвестного английского поэта XXI века:

I remember the wonderful puzzle,
And the formula number six,
My inspiration arising,
My imagination enlarge,
And now a madness solution appears.

В переводе вашего покорного слуги

Я помню чудную задачу,
И формулу под номером шестым.
Как появилось вдохновенье,
Как охватило озаренье,
И вот оно, безумное решенье.

На одном практическом занятии автору попалась формула (9) и он задумался о том, как её можно вывести. Ну, конечно, не по методу же математической индукции, как это предлагают повсюду. Он предложил, что должна выполняться формула

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 = \alpha_3 n^3 + \alpha_2 n^2 + \alpha_1 n + \alpha_0,$$

где коэффициенты $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$ - константы. Почему? Ну, я уже объяснял – это *озарение*. Ясно, что если $n = 0$, то $S_2(0) = 0$. Поэтому $\alpha_0 = 0$. Пусть теперь $n = 1, 2, 3$. Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 1, \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 8\alpha_3 &= 5, \\ 3\alpha_1 + 9\alpha_2 + 27\alpha_3 &= 14. \end{aligned}$$

Из этой системы уже не трудно найти, что

$$\alpha_1 = \frac{1}{6}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{3}.$$

Отсюда получаем

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Как теперь доказать эту формулу? Если она верна, то

$$S_2(n) - S_2(n-1) = n^2.$$

Прямые вычисления показывают, что это так. Дальше, следуя *вдохновению*, получаем формулу (9) и всё остальное, о чём говорилось выше. Этот метод приводит нас к оригинальному доказательству формулы (8).

3. Сумма первых кубов натуральных чисел. Поставим теперь перед собой задачу разыскания суммы кубов первых n чисел

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-1)^3 + n^3 . \qquad (11)$$

По аналогии с суммой $S_2(n)$, предположим, что

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-1)^3 + n^3 = \alpha_4 n^4 + \alpha_3 n^3 + \alpha_2 n^2 + \alpha_1 n + \alpha_0. \qquad (12)$$

По тем же причинам, изложенным для суммы $S_2(n)$ в пункте 2, мы должны считать, что $\alpha_0 = 0$. Полагая $n = 1, 2, 3, 4$, получим систему

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 1,\\
2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 8\alpha_3 + 16\alpha_4 &= 9,\\
3\alpha_1 + 9\alpha_2 + 27\alpha_3 + 81\alpha_4 &= 36,\\
4\alpha_1 + 16\alpha_2 + 64\alpha_3 + 256\alpha_4 &= 100.
\end{aligned}$$

Решая эту систему, получим, что

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{4}.$$

Подставляя это решение в формулу (12), получим, что сумма (11) равна

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \quad (13)$$

Так как

$$S_3(n) - S_3(n-1) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = n^3,$$

то формула (13) верна.

Можно попытаться получить решение этой задачи первым способом, который мы в честь Гаусса «условно» назвали его именем. Переписав сумму (10) в обратном порядке и сложив её с исходной суммой, получим

$$2S_3(n) = \left[1^3 + n^3\right] + \left[2^3 + (n-1)^3\right] + \ldots + \left[(n-1)^3 + 2^3\right] + \left[n^3 + 1^3\right].$$

Каждую сумму $\left[k^3 + (n+1-k)^3\right]$ дополним до куба суммы, прибавив слева и справа от знака равенства выражение $3k(n+1-k)(n+1)$

$$2S_3(n) + 3\cdot 1\cdot n(n+1) + 3\cdot 2\cdot (n-1)(n+1) + \ldots + 3(n-1)\cdot 2(n+1) + 3\cdot n\cdot 1(n+1) =$$
$$= \underbrace{(n+1)^3 + (n+1)^3 + \ldots + (n+1)^3 + (n+1)^3}_{n\ раз} = n(n+1)^3.$$

Отсюда, следует, что

$$S_3(n) = \frac{n(n+1)^3 - 3\cdot(n+1)\cdot\left[1\cdot n + 2\cdot(n-1) + \ldots + (n-1)\cdot 2 + n\cdot 1\right]}{2}. \quad (13)$$

Вспоминая формулу (8), окончательно получим

$$S_3(n) = \frac{n\left(n+1\right)^3}{2} - \frac{3\cdot(n+1)}{2}\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Заключение. Предложены новые методы вычисления сумм одинаковых степеней первых натуральных методов. Приведены примеры вычислений для степеней 1, 2 и 3. Автор надеется, что в дальнейшем эти методы позволят получить значения рассматриваемых сумм в самом общем случае и выявить их новые свойства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dunnington G.W. Carl Friedrich Gauss. Titan of Science. – N.Y.: Hafner Publishing, 1955. Reprinted Mathematical Association of America, 2004. – XXIX + 537 p.

2. Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках. – 4-е изд., исправленное. М.: МЦНМО, 2006. – 464 с.

3. Beardon A.F. Sums of Powers of Integers. American Mathematical Monthly, Vol. 103, No 3, (Mar. 1996) pp 201-213.

4. Харди Г.Г. Двенадцать лекций о Рамануджане. Перевод с английского А.Г. Арзамацева: – Москва: Институт компьютерных исследований, 2002. – 336 с.

REFERENCES

1. Dunnington G.W. Carl Friedrich Gauss. Titan of Science. – N.Y.: Hafner Publishing, 1955. Reprinted Mathematical Association of America, 2004. – XXIX + 537 p.

2. Gindikin S.G. Stories about physics and mathematics. – 4th ed., revised. – Moscow, MTsNMO, 2006. – 464 p.

3. Beardon A.F. Sums of Powers of Integers. American Mathematical Monthly, Vol. 103, No 3, (Mar. 1996) pp 201-213.

4. Hardy G.H. Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work. – Cambridge, at the University press, 1940.

USING TELESCOPIC SERIES FOR SUMMATION OF POSITIVE INTEGERS OF THE SAME POWERS

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072,
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

The problem of calculating the sums of positive integers of the same powers is considered. A new method of calculation, based on the use of telescopic series, is proposed. Demonstrates how to make telescopic series for given sums. The examples of such calculations are given.
Keywords: Sums of positive integers of the same powers, telescoping series, Carl Gauss, Srinivasa Ramanujan.