517.521

ПРИЗНАКИ СГУЩЕНИЯ II. ОБЩИЙ СТЕПЕННОЙ ПРИЗНАК СГУЩЕНИЯ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, ОСНОВАННОЕ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРИЗНАКА

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Предложено и доказано обобщение степенного признака сгущения (и его частного случая - признака Шлёмильха) сходимости бесконечного положительного ряда с монотонно убывающими членами. Доказательство основано на использовании интегрального признака сходимости Маклорена - Коши. Дана оценка суммы ряда в случае его сходимости.
Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, положительный ряд, ряд с убывающими членами, признак сгущения, степенной признак сгущения, интегральный признак сходимости, О. Коши, К. Кнооп, К. Маклорен, Е. Фабри, О. Шлемильх.

1. О признаках сгущения. В приложениях часто встречаются ряды с положительными и невозрастающими членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{1}$$

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots . \tag{2}$$

Примером такого ряда является обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 0 .$$

Для рядов (1) с положительными и невозрастающими членами великий французский математик О. Коши предложил в 1821 году в своём «Курсе алгебраического анализа» первый признак сгущения [1, pp. 135 - 136].

В 1873 году немецкий математик О. Шлемильх [2] показал, что в признаке Коши вместо подпоследовательности $\{a_{2^n}\}$ членов ряда (1) можно использовать подпоследовательность $\left\{a_{n^2}\right\}$. Он предложил следующий признак сгущения:

Положительный ряд (1), *удовлетворяющий условию* (2), *сходится или расходится одновременно с рядами*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)a_{k^2} \ \ и \ \sum_{k=1}^{\infty}ka_{k^2} .$$

Очевидное обобщение признака Шлемильха, названное **степенным признаком сгущения**, было дано недавно автором этих строк в [3] и в первой статье из цикла статей, посвящённых признакам сгущения [4]:

Положительный ряд (1), *удовлетворяющий условию* (2), *сходится или расходится одновременно с рядами*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k^m-(k-1)^m)a_{k^m} \ \ и \ \sum_{k=1}^{\infty}k^{m-1}a_{k^m} . \tag{3}$$

В случае сходимости, справедлива оценка (*в* [3] *оценка получена грубее*)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^m-(k-1)^m\right)a_{k^m} \le \sum_{n=1}^{\infty}a_n \le (2^m-1)\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^m-(k-1)^m\right)a_{k^m} . \tag{4}$$

2. Общий степенной признак сгущения. Степенной признак сгущения, сформулированный выше в первом пункте, допускает дальнейшее обобщение. Чтобы его сформулировать, введём неотрицательную и невозрастающую функцию $f(x)$, заданную на промежутке $\left[1,\infty\right)$ и такую, что в случае натурального аргумента, её значения совпадают с членами ряда (1)

$$f(n)=a_n, \quad n=1,2,3,\dots . \tag{5}$$

Очевидно, что для любого ряда (1), члены которого удовлетворяют условию (2), такую функцию можно получить, например, линейной интерполяцией. В этом случае, график функции $f(x)$ будет ломанной с бесконечным числом звеньев.

Для дальнейшего изложения нам понадобится *интегральный признак сходимости Маклорена – Коши* положительных рядов с невозрастающими членами, первоначально установленный в геометрической форме знаменитым шотландским математиком К. Маклореном в 1742 году [5]. Этот признак, забытый к началу XIX века, был вновь открыт Коши в 1827 году [6]:

Положительный ряд (1), *удовлетворяющий условию* (2), *сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом*

$$\int_1^\infty f(x)dx, \tag{6}$$

где $f(x)$ - *неотрицательная и невозрастающая функция, заданная на неограниченном промежутке* $x \geq 1$ *и принимающая значения* $f(n) = a_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$. *В случае сходимости, справедлива оценка*

$$\int_1^\infty f(x)dx \leq \sum_{n=1}^\infty f(n) \leq \int_1^\infty f(x)dx + f(1). \tag{7}$$

Рассмотрим бесконечную монотонно возрастающую и неограниченную сверху последовательность аргументов функции $f(x)$

$$1^\sigma < 2^\sigma < 3^\sigma < \ldots < k^\sigma < \ldots, \quad \sigma > 0. \qquad (8).$$

Так как функция $f(x)$ монотонна на промежутке $1 \leq x < \infty$, то она интегрируема на любом отрезке $[1, \beta]$ из этого промежутка [7, с. 329, 8, с. 135]. Тогда

$$\int_1^{(n+1)^\sigma} f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{k^\sigma}^{(k+1)^\sigma} f(x)dx. \tag{9}$$

В силу того, что функция $f(x)$ невозрастающая, имеем

$$\left((k+1)^{\sigma}-k^{\sigma}\right) f((k+1)^{\sigma}) \le \int\limits_{k^{\sigma}}^{(k+1)^{\sigma}} f(x)dx \le \left((k+1)^{\sigma}-k^{\sigma}\right) f(k^{\sigma}).$$

Складывая это неравенство с разными значениями k, изменяющимися в пределах от $k=1$ до $k=n$, и учитывая формулу (9), получим

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{\sigma}-k^{\sigma}\right) f((k+1)^{\sigma}) \le \int\limits_{1}^{(n+1)^{\sigma}} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{\sigma}-k^{\sigma}\right) f(k^{\sigma}). \quad (10)$$

Пусть положительный ряд (1), члены которого подчиняются условию (2), сходится. Тогда согласно интегральному признаку несобственный интеграл (6) сходится к некоторому значению I. Причём для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$\int\limits_{1}^{(n+1)^{\sigma}} f(x)dx < \int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx = I .$$

Из левой части неравенства (10) получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{\sigma}-k^{\sigma}\right) f((k+1)^{\sigma}) \le \int\limits_{1}^{(n+1)^{\sigma}} f(x)dx < I .$$

Принимая соглашение, что для любого вещественного числа σ

$$0^{\sigma}=0, \text{ если } \sigma>0,$$

приходим к неравенству

$$\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^{\sigma}-k^{\sigma}\right) f((k+1)^{\sigma}) < I + f(1).$$

Отсюда следует, что все частичные суммы положительного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{\sigma}-(k-1)^{\sigma}\right) f(k^{\sigma}), \quad \sigma>0$$

ограничены сверху. Поэтому он сходится, и для его суммы получаем, с учетом неравенства (7), оценку сверху

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(k^{\sigma}-(k-1)^{\sigma}\Big)f(k^{\sigma})-f(1)\le I\le\sum_{n=1}^{\infty}f(n)). \tag{11}$$

Пусть теперь ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(k^{\sigma}-(k-1)^{\sigma}\Big)f(k^{\sigma})=V,\quad \sigma>0. \tag{12}$$

сходится к своей сумме V. Докажем теперь, что найдётся такое вещественное число $M>0$ для которого неравенство

$$(k+1)^{\sigma}-k^{\sigma}\le M\left(k^{\sigma}-(k-1)^{\sigma}\right),\quad \sigma>0 \tag{13}$$

будет верным для всех натуральных значений $k\ge 1$. Для этого рассмотрим дробь, принимающую, очевидно, положительные значения.

$$\frac{(k+1)^{\sigma}-k^{\sigma}}{k^{\sigma}-(k-1)^{\sigma}}=\frac{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{\sigma}-1}{1-\left(1-\dfrac{1}{k}\right)^{\sigma}}>0,\quad \sigma>0,\quad k=1,2,3,\ldots. \tag{14}$$

Покажем, что эта дробь убывает с возрастанием переменной k. Для этого рассмотрим положительную и непрерывную функцию

$$f(x)=\frac{(1+x)^{\sigma}-1}{1-(1-x)^{\sigma}}>0,\quad \sigma>0,\quad 0<x\le 1,$$

которая для значений $x=\dfrac{1}{k}$ совпадает дробью из левой части неравенства (14). Так как её логарифмическая производная положительна

$$\frac{d}{dx}\ln f(x)=\sigma\frac{(1+x)^{\sigma-1}+(1-x)^{\sigma-1}+2x(1+x)^{\sigma-1}(1-x)^{\sigma-1}}{\Big((1+x)^{\sigma}-1\Big)\Big(1-(1-x)^{\sigma}\Big)}>0,\ 0<x<1,$$

то функция $f(x)$ будет возрастать на промежутке $0<x\le 1$. Тогда функция

$$f\left(\frac{1}{k}\right)=\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\sigma}-1}{1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^{\sigma}},$$

совпадающая с дробью в формуле (14) будет принимать наибольшее значение для $k=1$. Отсюда следует, что постоянная M из неравенства (13) равна

$$M=f\left(1\right)=2^{\sigma}-1,\quad \sigma>0.$$

Применив неравенство (13) к каждой разности в правой части неравенства (10), получим, в силу сходимости положительного ряда (12)

$$\int\limits_{1}^{(n+1)^{\sigma}} f(x)dx \le M\sum_{k=1}^{n}\Big((k^{\sigma}-(k-1)^{\sigma}\Big)f(k^{\sigma}) \le M\sum_{k=1}^{\infty}\Big((k^{\sigma}-(k-1)^{\sigma}\Big)f(k^{\sigma}).$$

Тогда несобственный интеграл (6) сходится и выполняется неравенство

$$\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx \le (2^{\sigma}-1)\sum_{k=1}^{\infty}\Big((k^{\sigma}-(k-1)^{\sigma}\Big)f(k^{\sigma}).$$

В таком случае, согласно интегральному признаку сходимости, ряд (1) сходится, причём его сумма, как это следует из неравенства (7) ограничена сверху

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le \int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx + f(1) \le (2^{\sigma}-1)\sum_{k=1}^{\infty}\Big((k^{\sigma}-(k-1)^{\sigma}\Big)f(k^{\sigma})+f(1). \quad (15)$$

Итак, ряд (1) и ряд (12) сходятся одновременно. Поэтому расходиться они могут тоже только одновременно. В случае сходимости этих рядов из неравенств (11) и (15) следует оценка

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}\Big((k^{\sigma}-(k-1)^{\sigma}\Big)f(k^{\sigma})-f(1) \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le \\ &\le (2^{\sigma}-1)\sum_{k=1}^{\infty}\Big((k^{\sigma}-(k-1)^{\sigma}\Big)f(k^{\sigma})+f(1).\end{aligned} \quad (16)$$

Докажем теперь, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\sigma-1} f(k^{\sigma}), \quad \sigma > 1 \tag{17}$$

и ряд (12) сходятся или расходятся одновременно. В таком случае, ряд (1) и ряд (17) тоже сходятся или расходятся одновременно. Для доказательства воспользуемся неравенством

$$k^{\sigma-1} \le k^{\sigma} - (k-1)^{\sigma} \le \sigma k^{\sigma-1}, \quad \sigma > 1, \tag{18}$$

справедливым для всех натуральных значений k. Действительно, применяя формулу конечных приращений Лагранжа (теорема о среднем значении) [7, с. 180, 8, с. 117]

$$f(b) - f(a) = f'(c)(a-b), \quad a < c < b$$

для функции $f(x) = x^{\sigma}$ получим правую часть неравенства (18)

$$k^{\sigma} - (k-1)^{\sigma} = \sigma c^{\sigma-1} \le \sigma k^{\sigma-1}, \quad k-1 < c < k\,.$$

Так как разность в случае $\sigma > 1$

$$k^{\sigma} - (k-1)^{\sigma} - k^{\sigma-1} = k^{\sigma-1}(k-1) - (k-1)^{\sigma} = (k-1)(k^{\sigma-1} - (k-1)^{\sigma-1}) > 0$$

положительна, то отсюда получаем левую часть неравенства (18). Таким образом, неравенство (18) доказано.

Одновременная сходимость или расходимость рядов (12) и (17) теперь следует из неравенства, связывающего n-е члены этих рядов

$$k^{\sigma-1} f(k^{\sigma}) \le \left(k^{\sigma} - (k-1)^{\sigma}\right) f(k^{\sigma}) \le \sigma k^{\sigma-1} f(k^{\sigma})\,.$$

Изложенные выше рассуждения, являются не чем иным, как доказательством *общего степенного признака сгущения*, который можно сформулировать следующим образом:

Если неотрицательная функция $f(x) \geq 0$ *не возрастает на промежутке* $1 \leq x < \infty$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *сходится или расходится одновременно с рядами*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k^{\sigma}-(k-1)^{\sigma})f(k^{\sigma}), \quad \sigma > 0 \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty}k^{\sigma-1}f(k^{\sigma}), \quad \sigma > 1.$$

В случае сходимости, справедлива оценка

$$V=\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{\sigma}-(k-1)^{\sigma}\right)f(k^{\sigma}), \quad \sigma > 0,$$

$$V-f(1) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(k^{\sigma}) \leq (2^{\sigma}-1)V+f(1).$$

В качестве примера применения общего степенного признака сгущения исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\sqrt[3]{n^2}}}.$$

Согласно общему степенному признаку сгущения (мы выбираем $\sigma = 3/2$), этот ряд сходится или расходится вместе с рядом $\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{k}\,\frac{1}{2^k}$. Сходимость последнего ряда легко установить с помощью признака Даламбера [8, 9, 10, 11, 12].

Заключение. Общий степенной признак сходимости доказан с учетом монотонного убывания членов положительного ряда за счёт выбора степенной подпоследовательности

$$\left\{k^{\sigma}\right\}, \quad \sigma > 0 \quad \text{или} \quad \sigma > 1, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

и применения интегрального признака сходимости Маклорена – Коши. Последний признак использовался для получения оценки (16) суммы ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Если положить $\sigma = m = 2, 3, 4, \dots$, то эта оценка грубее, чем оценка степенного признака сгущения (4), полученная нами [4]. Следовательно, остается надежда на уточнение оценки (16).

Следует отметить, что общий степенной признак сгущения не следует из общих признаков сгущения Кноппа (ошибочно называемого признаком Шлёмильха [10, 11]) и Фабри [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Cauchy A.L.** Cours d'analyse de l'École royale polytechnique I.re partie: Analyse algébrique. – Paris: Impr. royale Debure frères, 1821. – 576 p.

2. **Schlömilch O.** Ueber dei gleichzeitige Convergenz oder Divergenz zweier Reihen. ZfMuP, 1873, b28, s. 425-426.

3. **Терещенко И.В.** О обобщении признака сгущения Шлёмильха / Сб. науч. статей IV Межд. научно-прак. конф. «Научные чтения имени проф. Н.Е. Жуковского» 17-19 декабря 2013 г. – Краснодар. – 2014, сс. 155-161.

4. **Терещенко И.В.** Признаки сгущения I. Об обобщении признака сгущения Шлёмильха. Доказательство, основанное на свойстве монотонности. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2014. № 5. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/225.

5. **Maclaurin K.** A Treatise of Fluxions. Vol. 1, Edinburgh, 1742.

6. **Cauchy A.** Exercices Mathém, T.2, p 221, Paris, 1827.

7. **Фихтенгольц Г.М.** Основы математического анализа. Т. 1. – СПб.: Лань, 2001. – 448 с.

8. **Рудин У.** Основы математического анализа. Изд. 2-е., стереот. – М.: Мир, 1976, – 319 с.

9. **Фихтенгольц Г.М.** Основы математического анализа. Т. 2. – СПб.: Лань, 2001. – 464 с.

10. **Knopp K.** Theorie und anwendung der unendlichen reihen. Berlin, Springer, 1922. – 474 s.

11. **Bonar D.D., Khoury M. Jr.** Real infinite series. – Mathematical Association of America, 2006. – 264 с.

12. **Fabry E.** Théorie des séries a termes constants applications aux calculs numériques. – Paris, Hermann, 1910. – 198 p.

REFERENCES

1. **Cauchy A.L.** Cours d'analyse de l'École royale polytechnique I.re partie: Analyse algébrique. – Paris: Impr. royale Debure frères, 1821. – 576 p.

2. **Schlömilch O.** Ueber dei gleichzeitige Convergenz oder Divergenz zweier Reihen. ZfMuP, 1873, b28, s. 425-426.

3. **Tereshchenko I.V.** O obobshhenii priznaka sgushhenija Shljomil'ha (On a generalization of The Schlömilch's Condensation Test) / Sb. nauch. statej IV Mezhd. nauchno-prak. konf. «Nauchnye chtenija imeni prof. N.E. Zhukovskogo» 17-19 dekabrja 2013 g. – Krasnodar. – 2014. pp. 155-161.

4. **Tereshchenko I.V.** Condensation Tests I. About The Generalization Schlömilch's Condensation Test. The Proof Based On The Property Of Monotonicity. // Scientific works of KubSTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2014. № 5. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/225.

5. **Maclaurin K.** A Treatise of Fluxions. Vol. 1, Edinburgh, 1742.

6. **Cauchy A.** Exercices Mathém, T.2, p 221, Paris, – 1827.

7. **Fihtengol'c G.M.** Osnovy matematicheskogo analiza. T. 1. – SPb.: Lan', 2001. – 448 s.

8. **Rudin W.** Principles of Mathematical Analysis. 3-d ed. N.J. McGraw-Hill, Inc., 1976, – X+342 p.

9. **Fihtengol'c G.M.** Osnovy matematicheskogo analiza. T. 2. – SPb.: Lan', 2001. – 464 s.

10. **Knopp K.** Theorie und anwendung der unendlichen reihen. Berlin, Springer, 1922. – 474 s.

11. **Bonar D.D., Khoury M. Jr.** Real infinite series. – Mathematical Association of America, 2006. – 264 c.

12. **Fabry E.** Théorie des séries a termes constants applications aux calculs numériques. – Paris, Hermann, 1910. – 198 p.

CONDENSATION TESTS II. THE GENERAL POWER CONDENSATION TEST. THE PROOF BASED ON THE INTEGRAL TEST

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

A generalization of the power condensation test (and its special case – Schlömilch's test) for convergence of an infinite series with positive decreasing terms is proposed and proved. The proof is based on the use of Maclaurin – Cauchy's integral test for convergence. Sum bounds for the infinite series in the case of convergence are given.
Keywords: infinite series, positive infinite series, infinite series with the decreasing terms, condensation test, power condensation test, integral test for convergence, A. Cauchy, E. Fabry, K. Knopp, K. Maclaurin, O. Schlömilch.