УДК 517.3

КВАЗИКОНФОРМНЫЕ В СРЕДНЕМ ОТОБРАЖЕНИЯ

Ю.В. ТЕРЕНТЬЕВА

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
Электронная почта: tuv86@mail.ru

В работе изучаются экстремальные квазиконформные в среднем отображения колец.
Ключевые слова: уравнение Бельтрами, теорема Белинского.

Рассмотрим классическое уравнение Бельтрами [1]

$$w_{\bar{z}} = \mu(z) w_z, \tag{1}$$

в котором коэффициент $\mu(z)$ имеет вид

$$\mu(z) = -qe^{2i\varphi}, \; 0 \le q_0 < q < 1.$$

характеристика $K(z)$ отображения $w(z)$ есть

$$K = \frac{1+q}{1-q} = const.$$

Приведем формулировку теоремы П. П. Белинского, которая играет важную роль в изучении уравнения (1).

Теорема П. П. Белинского [1]. *Пусть кольцо C_{r1} отображается квазиконформно на кольцо $C_{\rho 1}$. Тогда имеет место двойное неравенство*

$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_{r1}} \frac{K(z)-1}{|z|^2}\,dxdy \le \ln\frac{\rho}{r} \le \frac{\ln\rho}{2\pi\ln r}\iint\limits_{C_{r1}} \frac{K(z)-1}{|z|^2}\,dxdy \quad , \tag{2}$$

равенство достигается только для отображений вида:

$$w(z) = e^{i\beta} z\phi(|z|), \tag{3}$$

(левая часть неравенства (2)) и вида

$$w(z) = |z|^{\alpha} e^{i\psi(\arg z)}, \tag{4}$$

(правая часть неравенства (2)), где φ, ψ — действительные функции, а α, β — действительные ненулевые постоянные.

Функция ψ, доставляющая равенство в правой части неравенства (2), имеет вид

$$w(z) = z|z|^{K^{-1}-1}. \tag{5}$$

Из представления (5) следует, что экстремальное K — квазиконформное отображение колец обладает тем свойством, что оно переводит экстремальным образом (в смысле равенства в правой части неравенства (2)) не только фиксированное кольцо C_{r1} на кольцо $C_{\rho 1}$, но и любое подкольцо C_{t1}, $t > r$, в подкольцо $C_{\tau 1}$, $\tau > \rho$, также экстремально.

Согласно теореме П. П. Белинского, в классе отображений квазиконформных в среднем для фиксированного кольца C_{r1} существует отображение $w: C_{r1} \to C_{\rho 1}$, являющееся экстремальным, при этом радиус ρ определяется из условия равенства в правой части неравенства (2). Это экстремальное отображение имеет вид (4), в котором, вообще говоря, α есть функция радиуса r. Легко показать, что данная функция имеет вид:

$$\alpha(r) = -\frac{\ln r}{\ln r + 2\Lambda_r(q)}. \tag{6}$$

Мы видим, что отображение $|z|^{\alpha(r)} e^{i\psi(\varphi)}$, экстремальное для кольца C_{r1}, не является экстремальным для кольца C_{t1}, $t > r$, так как для последнего экстремальным является отображение $|z|^{\alpha(t)} e^{i\psi(\varphi)}$, где $\alpha(t) \neq \alpha(r)$. Вместе с тем, как указывалось ранее, для K — квазиконформных отображений, у которых $q(r) \equiv q$, это не так, ибо для них $\alpha(r) \equiv const$.

Нами было доказано, что не существуют отображения, отличных от последних, экстремальных на каждом подкольце C_{t1}, $r \le t < 1$.

Теорема. *В классе отображений* $w: C_{r1} \to C_{\rho 1}$, *удовлетворяющих уравнению Бельтрами*

$$w_{\overline{z}} = q(r) e^{2i\varphi} w_z, \tag{7}$$

квазиконформные в среднем отображения с характеристикой $q(r) \equiv const$, *они и только они, переводят в экстремальном смысле кольцо* C_{r1} *в кольцо* $C_{\rho 1}$, *при* *этом любое кольцо* C_{t1}, $t>r$, *переводится в соответствующее ему кольцо также экстремальным образом.*

Замечание. Можно найти отображение с неограниченным коэффициентом $q(r)$, обладающее этим свойством при приближении к границе кольца C_{r1}, то есть являющееся почти экстремальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белинский П.П. Общие свойства квазиконформных отображений / П. П. Белинский.— Новосибирск: Наука, 1974. — 100 с.

REFERENCES

1. Belinsky P.P., Novosibirsk: Nauka, 1974. — 100 p.

ON AVERAGE, QUASICONFORMAL MAPPING

YU.V. TERENTEVA

Kuban State Technological University,
2, Moskovskayast., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: tuv86@mail.ru

We study extremal quasiconformal on the average mappings rings.

Key words: Beltrami equation, Belinsky's theorem.