УДК 513.628

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВЗАИМНОГО ПОЛОЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ВИД ИХ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ КОНСТРУИРОВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ ФОРМ

Е.Ю. КОСЯКОВА

*Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: betulla@list.ru*

Целью настоящего исследования явилось изучение вопросов, связанных с моделированием двух и более поверхностей в виде взаимно однозначных соответствий, что необходимо для разработки теоретических основ практических способов конструирования составных поверхностей в виде гладких двумерных обводов. Задание поверхностей на двухкартинном чертеже взаимно однозначными соответствиями имеет определенное преимущество по сравнению с заданием их каркасом линий или проекциями геометрической части определителя. Это преимущество заключается в получении непрерывной модели поверхности вместо ее дискретного каркаса. Такое задание поверхности дает возможность исследовать свойства поверхностей в целом. Алгебраическая поверхность n-го моделируется на плоскости совпавших проекций $\pi'=\pi''$ центральным бирациональным преобразованием (n-1)-го, если центры S', S'' проецирования являются (n-1)-кратными точками моделируемой поверхности. Для решения ряда прикладных задач представляет интерес рассмотрение вопросов построения моделей двух поверхностей. При этом важно выяснить, как влияет выбор центров проецирования, взаимное положение данных поверхностей на характеристики их моделей. Автором рассматриваются вопросы выбора центров проецирования и взаимного положения на примере моделирования на двухкартинном чертеже двух квадрик.

Ключевые слова: стереографическое проецирование, кремоновы преобразования, центр преобразования, инвариантная кривая, фундаментальная система, образ, коника, квадрика.

Алгебраическая поверхность n-го моделируется на плоскости проекций $\pi'=\pi''$ центральным бирациональным преобразованием (n-1)-го, если центры S', S'' проецирования являются (n-1)-кратными точками моделируемой поверхности, в противном случае между точками поверхности и плоскости изображения не будет перспективного соответствия [1].

При моделировании двух квадрик одним и тем же аппаратом отображения необходимо знать, как влияет выбор аппарата проецирования, взаимное расположение данных поверхностей на характеристики их моделей на плоскости проекций, в качестве которых мы принимаем центральные кремоновы преобразования с общей вершиной. Полученное изображение должно быть обратимым: пара известных проекций A_i', A_i'' восстанавливает положение оригинала A пространстве.

Две квадрики $\bar{\Sigma}^2$, Σ^2 в общем случае пересекаются по пространственной кривой a^4 четвертого порядка. Расположив центры проецирования S', S'', на линии пересечения поверхностей, получим модели квадрик в виде центральных соответствий с общим центром на две совмещенные плоскости $\pi'=\pi''$. Посредством двух стереографических проецирований точек данных поверхностей $\bar{\Sigma}^2$, Σ^2 на плоскости изображения в качестве моделей получим центральные квадратичные преобразования T_2, $\bar{T}_2$ с общим центром и инвариантными кривыми d^2, $\bar{d}^2$. Кроме центров преобразований в состав F-систем квадратичных преобразований входят следы образующих поверхностей $\bar{\Sigma}^2$, Σ^2, проходящих через центры проецирования.

Линия пересечения a^4 квадрик $\bar{\Sigma}^2$, Σ^2 на плоскости проекций $\pi'=\pi''$ моделируется двумя кривыми $(a')^3$, $(a'')^3$ третьего порядка, соответственными одновременно в обоих преобразованиях T_2, $\bar{T}_2$. Соответствие этих кривых определяется их инцидентностью определенным F- точкам полей π', π'', а также точкам D_1, D_2 пересечения инвариантных линий d^2, $\bar{d}^2$ [2].

Значительный интерес представляет рассмотрение частных случаев взаимного расположения двух квадрик при различных сочетаниях видов квадрик и центров проецирования, исследование влияния этих факторов на взаимосвязь свойств и характеристик их моделей. Здесь возможны различные варианты получения линий пересечения, касания, соприкосновения двух квадрик и расположения центров проецирования:

1. Квадрики при одноточечном касании пересекаются по пространственной кривой a^4 четвертого порядка с узловой точкой в точке касания поверхностей. В этом случае один центр проецирования может быть совмещен с узловой точкой линии пересечения, а другой – с любой другой точкой, принадлежащей a^4, или оба центра проецирования могут быть простыми точками линии a^4.

2. Квадрики при двухточечном касании имеют линию пересечения a^4, распавшуюся на две коники, которые пересекаются в двух точках. В этом случае оба центра проецирования S', S'' могут совпасть с точками касания, один – с точкой касания, а другой – с произвольной точкой этих коник, или центры S', S'' могут быть простыми точками этих коник.

3. Квадрики, имея три точки касания, пересекаются по двум совпавшим коникам. В этом случае центры S', S'' проецирования должны принадлежать этим кривым.

4. Квадрики имеют общую образующую – прямую $S'S''$. Они пересекаются по кривой a^4, распавшейся на эту прямую $S'S''$и кривую третьего порядка a^3. При этом расположение центров проецирования на линии пересечения поверхностей может быть следующим: S', S'' могут принадлежать или нет линии a^3; один из центров может быть помещен на линию a^3, а другой – ей не принадлежать.

5. В случае касания квадрик вдоль образующей $S'S''$ линия пересечения a^4 данных поверхностей представляет собой дважды считаемую прямую $S'S''$ и конику a^2. Здесь также возможны различные варианты расположения центров проецирования на составляющих линий пересечения данных поверхностей.

6. Поверхности $\bar{\bar{\sum}}^2, \sum^2$ соприкасаются вдоль двух образующих.

7. Поверхности $\bar{\bar{\sum}}^2$, $\sum^2$ соприкасаются вдоль одной образующей и пересекаться еще по одной.

8. Поверхности $\bar{\bar{\sum}}^2$, $\sum^2$ соприкасаются вдоль образующей, считаемой четырежды.

Построим модели двух поверхностей $\bar{\bar{\sum}}^2$, $\sum^2$ второго порядка, имеющих одноточечное касание, аппаратом проецирования, включающим пару связок прямых с центрами S', S'', инцидентными линии пересечения данных квадрик. При рассматриваемом взаимном положении поверхностей их линией пересечения будет пространственная кривая m^4 четвертого порядка с узловой точкой в точке касания поверхностей. Поместим один из центров проецирования, например, S' в узловую точку кривой m^4, а другой центр S'' совместим с произвольной точкой линией пересечения. Выбранным аппаратом отобразим квадрики на плоскость проекций $\pi=\pi'$. Рассматриваемые поверхности второго порядка моделируются, таким образом, на плоскости проекций двумя центральными квадратичными преобразованиями T_2 , $\bar{T}_2$ с общим центром $F_1'=F_1''=\bar{F}_1'=\bar{F}_1''$ и инвариантными кривыми d^2, $\bar{d}^2$ (рисунок 1). Линия m^4 их пересечения проецируется из центра S' в кривую $(m')^2$ второго порядка, а из S'' - в кривую $(m'')^3$ третьего порядка. Кривые $(m')^2$, $(m'')^3$ соответственны в преобразованиях, T_2 , $\bar{T}_2$. Кривой $(m')^2$ второго порядка в преобразовании T_2 должна соответствовать $(m'')^4$ кривая четвертого порядка, которая в свою очередь распадается на составляющие: принципиальную прямую j_1'' поля π'', соответственную центру преобразования T_2, и собственно образ $(m'')^3$ кривой $(m')^2$. В преобразовании $\bar{T}_2$ рассматриваемой кривой $(\bar{m}')^3$ соответствует кривая $(\bar{m}'')^4$, распавшаяся на принципиальную прямую j_1'', соответственную центру $\bar{F}_1'=\bar{F}_1''$ данного преобразования $\bar{T}_2$, и кривую $(\bar{m}'')^3$ третьего порядка.

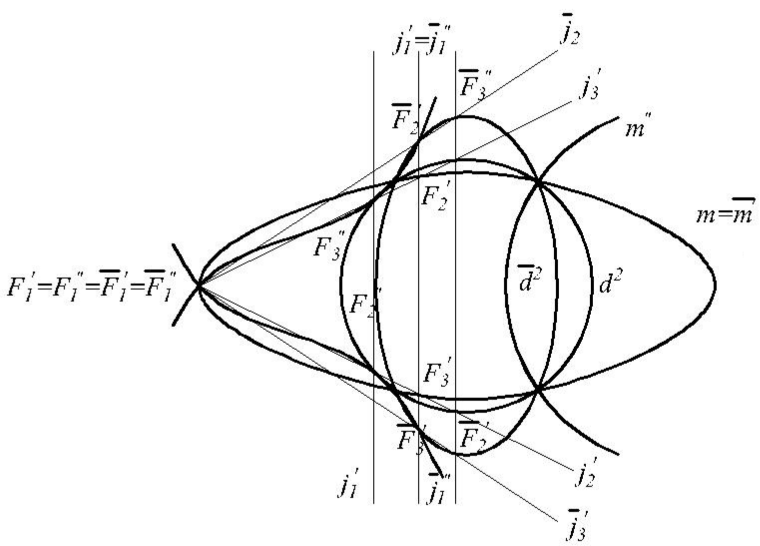

Рисунок 1 – моделирование линии пересечения двух квадрик

Если кривую $(m'')^3$ отнести к полю π'', то ей в квадратичном преобразовании T_2 соответствует кривая $(m')^6$ шестого порядка. Но последняя распадается на ряд составляющих: принципиальную прямую j_1', соответственную центру преобразования, считаемую дважды, а также на пару принципиальных прямых $\bar{j}_2'$ и $\bar{j}_3'$, соответственных точкам $\bar{F}_2'$ и $\bar{F}_3'$, и кривую $(\bar{m}')^2$ второго порядка.

При моделировании двух квадрик $\bar{\sum}^2$, $\sum^2$, имеющих две точки касания, двумя стереографическими проецированиями, центры S', S'' которых помещены в точки касания, получим в качестве их плоских моделей два взаимно однозначных соответствии T_2, $\bar{T}_2$. Общий центр преобразований T_2, $\bar{T}_2$ будет находиться в несобственной точке F_1^∞ и инцидентен паре совпавших прямых $m' = m''$, $\bar{m}' = \bar{m}''$, которыми моделируется распавшаяся на две коники m^2 и $\bar{m}^2$ линия пересечения квадрик $\bar{\sum}^2$, $\sum^2$.

Рассмотренные примеры построения моделей двух квадрик при различных вариантах их взаимного положения показали, что линии пересечения моделируется двумя проекциями, соответственным одновременно в двух центральных преобразованиях T_2, $\bar{T}_2$ с общим центром. В зависимости от взаимного положения оригиналов их модели - преобразования T_2, $\bar{T}_2$, приобретают определенные общие свойства: совпадение некоторых пар принципиальных линий, соприкосновение их инвариатных кривых, появление общих слабоинвариантных линий т.д.

Проведенные исследования важны для решения обратной задачи моделирования поверхностей. Задание двух или более взаимосвязанных моделей и определенного аппарата отображения позволяет конструировать гладкие двумерные обводы.

ЛИТЕРАТУРА

1.Иванов Г.С. Конструирование технических поверхностей.- М.: Машиностроение, 1987.188с.

2. Косякова Е.Ю. Моделирование взаимного положения двух квадрик на двухкартинном чертеже / Тематический сборник научных трудов МАИ. М: МАИ, 1992.

REFERENCES

1 .Ivanov G.S. Konstruirovanie tekhnicheskikh poverkhnostey.- M.: Mashinostroenie, 1987.188 s.

2. Kosyakova E.Yu. Modelirovanie vzaimnogo polozheniya dvukh kvadrik na dvukhkartinnom chertezhe / Tematicheskiy sbornik nauchnykh trudov MAI. M: MAI, 1992.

RESEARCH OF THE INFLUENCE OF THE MUTUAL SITUATION OF SURFACES ON THE SPECIES OF THEIR MODELS IN THE PROBLEMS OF DESIGNING TECHNICAL FORMS

E.YU. KOSYAKOVA

Kuban State Technological University.
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072,
e-mail: betulla@list.ru

The purpose of this study was to study questions related to the modeling of two or more surfaces in the form of one-to-one correspondences, which is necessary for developing the theoretical foundations of practical methods for constructing composite surfaces in the form of smooth two-dimensional circuits. Specifying surfaces on a two-picture drawing of one-to-one correspondences has a certain advantage in comparison with the given skeleton of lines or projections of the geometric part of the determinant. This advantage lies in the fact that during the continuous processing of the surface of its floppy framework. This setting of the surface makes it possible to investigate the properties of surfaces as a whole. An algebraic surface of n-th order is modeled on the plane of coincident projections π '= π' 'of a centrally birationally transformed (n-1) -th order if the projection centers S', S 'are (n-1) -fold points of the modeled surface. The tasks that can be applied to the design of two surfaces. To solve a number of applied problems, it is of interest to consider the construction of models of two surfaces. It is important to find out how the choice of projection centers, the relative position of these surfaces affects the characteristics of their models. The author considers the questions of the choice of projection and mutual position centers on the example of modeling on a two-picture drawing of two quadrics.

Key words: stereographic projection, Cremone transformations, center of transformation, invariant curve, fundamental system, conic, quadric.