УДК 517.521

О СВЯЗИ МЕЖДУ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ЭЙЛЕРА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ АБЕЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО РЯДА

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Введено понятие простого преобразования Эйлера бесконечного числового ряда. С использованием этого понятия доказана теорема Эйлера о сумме арифметико-геометрической прогрессии k рода. Установлена связь между простым преобразованием Эйлера бесконечного ряда и преобразованием Абеля бесконечного ряда и доказано, что ряд, преобразованный по Эйлеру, легко сводится к ряду, преобразованному по Абелю. Показано, что преобразование Эйлера можно рассматривать, как преобразование, при котором бесконечный ряд подвергается простому преобразованию Эйлера бесконечное число раз. Приведены условия, выполнение которых достаточно для справедливости преобразования Эйлера.

Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, преобразование Эйлера бесконечного ряда, преобразование Абеля бесконечного ряда, арифметико-геометрическая прогрессия, конечные первые разности, конечные вторые разности.

1. Введение. Целью данной статьи является прояснение связи между *преобразованием Эйлера* и *преобразованием Абеля* бесконечного ряда. Преобразование Эйлера было открыто Леонардом Эйлером в конце 40-х годов XVIII века и впервые изложено им в изданной в 1755 году в Санкт-Петербурге на латинском языке книги “Institutiones calculi differentialis”. Русский перевод этой книги под названием «Дифференциальное исчисление» был издан на русском языке в 1949 году в серии «Классики естествознания». Преобразованию рядов, т. е. преобразованию Эйлера, в этой книге посвящена перавя глава второй части [1, с. 211].

Преобразование Абеля бесконечного числового ряда было открытым Нильсом Абелем и в 1826 году изложено им в статье посвящённой исследованию биноминального ряда [2, S. 314]. Надо сказать, что за исключением одного источника [3, с. 205], в котором без всяких пояснений преобразование Эйлера названо преобразованием Эйлера – Абеля, эта связь даже не упоминается. Для понимания дальнейшего нам понадобятся некоторые сведения из исчисления конечных разностей.

2. Конечные разности. Рассмотрим некоторую бесконечную действительную или комплексную числовую последовательность

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots. \tag{1}$$

Определение 1. *Конечными первыми разностями или конечными разностями первого порядка называются разности* [4, с. 62]

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{2}$$

Конечные первые разности сами являются бесконечными последовательностями

$$\{\Delta a_n\}_{n=0}^{\infty}. \tag{3}$$

Заметим, что если члены второй числовой последовательности

$$\{b_n\}_{n=0}^{\infty} \tag{4}$$

отличаются от членов первой последовательности (1) на постоянную величину

$$b_n = a_n + C, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{5}$$

то первые конечные разности этих последовательностей равны

$$\Delta b_n = \Delta a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{6}$$

Следовательно, «восстановить» последовательность (1) по последовательности её первых разностей (2) можно только с точностью до произвольной постоянной.

Определение 2. *Вторыми конечными разностями или конечными разностями второго порядка называются разности*

$$\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n) = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{7}$$

Определение 3. *Третьими конечными разностями или конечными разностями третьего порядка называются разности*

$$\Delta^3 a_n = \Delta\left(\Delta^2 a_n\right) = \Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_n = a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{8}$$

Определение 4. *K-ми конечными разностями или конечными разностями k-го порядка называются разности*

$$\Delta^k a_n = \Delta\left(\Delta^{k-1} a_n\right) = \Delta^{k-1} a_{n+1} - \Delta^{k-1} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \ k = 1, 2, 3, \dots . \tag{9}$$

Определение 5. *Нулевой конечной разностью или конечной разностью нулевого порядка называются сами члены последовательности* (1)

$$\Delta^0 a_n = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \ . \tag{10}$$

Методом математической индукции доказывается [4, с. 63], что

$$\Delta^k a_n = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m a_{n+k-m}, \ n = 0, 1, 2, \dots, \ k = 0, 1, 2, \dots . \tag{11}$$

Так как $\Delta^2 a_n = \Delta\Delta a_n$ и $\Delta^3 a_n = \Delta\Delta^2 a_n = \Delta\Delta\Delta a_n$, то тем же методом математической индукции несложно доказывается, что

$$\Delta^k a_n = \underbrace{\Delta \dots \Delta}_{k \text{ раз}} a_n, \ n = 0, 1, 2, \dots, \ k = 0, 1, 2, \dots \tag{12}$$

и что

$$\Delta^k a_n = \underbrace{\Delta^{k-p} \Delta^p}_{k \text{ раз}} a_n, \ n = 0, 1, 2, \dots, \ k = 0, 1, 2, \dots, p = 0, 1, 2, \dots, k \tag{13}$$

Справедлива следующая лемма [4, с. 64].

Лемма. Если $a_n = P_k(n)$, где $P_k(n)$ есть многочлен целой степени $k \ge 0$, то

$$\Delta^m P_k(n) = \begin{cases} \text{const}, & m = k, \\ 0, & m > k. \end{cases} \tag{14}$$

Доказательство. Мы вынуждены привести свой вариант доказательства леммы, так как доказательство в [4, с. 64] основано на понятии производной старшего порядка и применении теоремы Лагранжа (формулы конечных приращений), то есть требует привлечения понятий и идей математического анализа. Мы же дадим полностью алгебраическое доказательство, свободное от необходимости считать $a_n = f(n)$, где $f(x)$ - дифференцируемая достаточное число раз функция.

Если $k = 0$, то очевидно, что лемма верна. Пусть $k \ge 1$. Рассмотрим произвольный многочлен k-й степени - $P_k(n) = \sum_{s=0}^{k} \alpha_s n^s$. Тогда

$$\Delta P_k(n) = \sum_{s=0}^{k} \alpha_s \Delta n^s = \sum_{s=1}^{k} \alpha_s \left((n+1)^s - n^s \right) = \sum_{s=1}^{k} \alpha_s \left(\sum_{p=0}^{s} C_s^p n^p - n^s \right) = \sum_{s=1}^{k} \alpha_s \left(\sum_{p=0}^{s-1} C_s^p n^p \right) =$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2 \left(1 + 2n\right) + \ldots + \alpha_k \left(1 + kn + \ldots + kn^{k-1}\right) = Q_{k-1}(n).$$

Итак, $\Delta P_k(n) = Q_{k-1}(n)$, где $Q_{k-1}(n)$ - многочлен степени $k-1$. Отсюда следует, что каждый раз, когда от многочлена $P_k(n)$ вычисляется конечная разность, степень многочлена уменьшается на единицу. Тогда, с учётом формул (12) и (13), получим

$$\Delta^k P_k(n) = \underbrace{\Delta \ldots \Delta}_{k-\text{раз}} P_k(n) = Q_0(n) = \text{const},$$

$$\Delta^{m+k} P_k(n) = \Delta^m \left(\Delta^k P_k(n) \right) = \Delta^m \left(\underbrace{\Delta \ldots \Delta}_{k-\text{раз}} P_k(n) \right) = \Delta^m Q_0(n) = 0.$$

Лемма доказана.

3. Преобразование Абеля. Рассмотрим две произвольных вещественных или комплексных последовательности $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$. Покажем, что в этом случае справедливо *преобразование Абеля для конечного ряда* [2, S. 314]

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_n \beta_n = \alpha_N B_N - \alpha_0 C - \sum_{n=0}^{N-1} B_n \Delta \alpha_n, \tag{15}$$

где C - произвольная константа, $B_0 = \beta_0 + C,\ B_n = \beta_n + B_{n-1},\ n = 1, 2, 3, \ldots, N$. Действительно, так как $\beta_0 = B_0 - C,\ \beta_n = B_n - B_{n-1},\ n = 1, 2, 3, \ldots, N$, то

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_n \beta_n = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \left(B_n - B_{n-1} \right) + \alpha_0 \beta_0 = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n B_n - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n B_{n-1} + \alpha_0 \left(B_0 - C \right).$$

Пусть $m = n-1$. Тогда получаем формулу (15)

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_n \beta_n = \alpha_N B_N + \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n B_n - \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_{m+1} B_m - \alpha_0 C = \alpha_N B_N - \alpha_0 C - \sum_{n=0}^{N-1} B_n \Delta \alpha_n,$$

где учтена независимость суммы от индекса суммирования

$$\sum_{m=0}^{N-1} \alpha_{m+1} B_m = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_{n+1} B_n.$$

Формулу (15) можно обобщить, если два целых числа N и M таковы, что $N > M \geq 0$ и $B_{-1} = C$. В таком случае, вместо формулы (15) получаем ещё одну формулу для преобразования Абеля конечной суммы

$$\sum_{n=M}^{N} \alpha_n \beta_n = \alpha_N B_N - \alpha_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} B_n \Delta\alpha_n \ . \tag{16}$$

Заметим, что сам Абель, как и многие другие математики, всегда выбирали в формулах (15) и (16) значение $C = 0$. В этом случае $B_n = \beta_0 + \beta_1 + ... + \beta_n$ и $\beta_0 = B_0,\ \beta_k = \Delta B_{k-1},\ k = 1, 2, 3, ..., n-1$.

4. Преобразование Эйлера. Рассмотрим сходящийся вещественный или комплексный ряд с суммой S

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \ . \tag{17}$$

Умножим ряд (17) на число $q \neq 1$ и вычтем из него полученный ряд

$$S(1-q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{n+1} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{n+1} \ .$$

Так как $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1} q^{m+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} q^{n+1}$, то получаем сходящийся ряд

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n = \frac{a_0}{1-q} + \frac{q}{1-q} \sum_{n=0}^{\infty} q^n \Delta a_n \ . \tag{18}$$

где $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ - правая разность первого порядка. Переход от ряда (17) к ряду (18) будем называть в честь Леонарда Эйлера простым преобразованием Эйлера бесконечного ряда и писать

$$T\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \right) = \frac{a_0}{1-q} + \frac{q}{1-q} \sum_{n=0}^{\infty} q^n \Delta a_n \ . \tag{19}$$

Из формулы (18) следует, что если ряд (17) сходится к своей сумме S, то ряд (19), полученный из ряда (17) простым преобразованием сходится к той же самой сумме S.

Применим теперь простое преобразование Эйлера (19) к сходящемуся ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n q^n$, тогда получим сходящийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Delta a_n q^n=\frac{\Delta a_0}{1-q}+\frac{q}{1-q}\sum_{n=0}^{\infty}q^n\Delta^2 a_n\ . \tag{20}$$

Подставив ряд (20) в ряд (18), придём после двух кратного применения простого преобразования Эйлера (19) к сходящемуся ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n q^n=\frac{a_0}{1-q}-\frac{q\Delta a_0}{(1-q)^2}+\frac{q^2}{(1-q)^2}\sum_{n=0}^{\infty}q^n\Delta^2 a_n\ . \tag{21}$$

Применяя, шаг за шагом, простое преобразование Эйлера к ряду в правой части формулы (19) на k -м шаге $(k=0,1,2,...)$ получим сходящийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n q^n=\frac{a_0}{1-q}+\frac{q\Delta a_0}{(1-q)^2}+\frac{q^2\Delta^2 a_0}{(1-q)^3}+...+\frac{q^{k-1}\Delta^{k-1}a_0}{(1-q)^k}+\frac{q^k}{(1-q)^k}\sum_{n=0}^{\infty}q^n\Delta^k a_n\ . \tag{22}$$

Преобразование сходящегося ряда (17), задаваемое формулой (22) будем называть *простым преобразованием Эйлера* $k+1$ *-го порядка*. Справедлива следующая теорема, принадлежащая Эйлеру

Теорема 1 (Теорема Эйлера [1, с. 212] о сумме арифметико-геометрической прогрессии *k*-го рода). *Если* $P_k(n)$ *- вещественный или комплексный многочлен степени k, то ряд* $\sum_{n=0}^{\infty}P_k(n)q^n$ (*арифметико–геометрическая прогрессия k рода*) *сходится абсолютно для значений* $|q|<1$ *и расходится для значений* $|q|\geq 1$. *В случае сходимости сумма ряда* $\sum_{n=0}^{\infty}P_k(n)q^n$ *равна*

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_k(n)q^n=\frac{P_k(0)}{1-q}+\frac{q\Delta P_k(0)}{(1-q)^2}+\frac{q^2\Delta^2 P_k(0)}{(1-q)^3}+...+\frac{q^k\Delta^k P_k(0)}{(1-q)^{k+1}}\,. \tag{23}$$

Доказательство. Собственно сам Эйлер ограничился лишь замечанием о том, что если разность некоторого порядка $\Delta^k a_n$ становится постоянной и не меняется с изменением величины *n*, то сумма ряда (22) равна

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n q^n=\frac{a_0}{1-q}+\frac{q\Delta a_0}{(1-q)^2}+\frac{q^2\Delta^2 a_0}{(1-q)^3}+...+\frac{q^k\Delta^k a_0}{(1-q)^{k+1}}\,.$$

По этой причине мы вынуждены дать полное доказательство теоремы Эйлера. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} P_k(n)q^n$ сходится, то из леммы 1 следует, что $\Delta^{k+1}P_k(n)=0$. Тогда из формулы (22) получаем формулу (23).

Для определения значений q, для которых ряд (23) сходится, воспользуемся признаком отношений (признаком Даламбера). Ряд (23) будет сходиться абсолютно, если

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{P_k(n+1)q^{n+1}}{P_k(n)q^n}\right|<1 \tag{24}$$

и расходиться, если

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{P_k(n+1)q^{n+1}}{P_k(n)q^n}\right|>1. \tag{25}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{P_k(n+1)}{P_k(n)}\right|=1$, то из неравенств (24) и (25) следует, что ряд (23) будет абсолютно сходиться для значений $|q|<1$ и расходится для значений $|q|>1$. Если $|q|=1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left|P_k(n)q^n\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|P_k(n)\right|=+\infty$, то есть общий член ряда не является бесконечно малой величиной при $n\to\infty$. Следовательно, ряд (23) расходится для всех значений $|q|\geq 1$. Теорема Эйлера доказана.

Докажем теперь следующую теорему, установленную нами.

Теорема 2. (Теорема о связи простого преобразования Эйлера с преобразованием Абеля). *Для бесконечного сходящегося ряда* (17)

$$S=\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

простое преобразование Эйлера (18)

$$S=\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n=\frac{a_0}{1-q}+\frac{q}{1-q}\sum_{n=0}^{\infty} q^n \Delta a_n$$

является не чем иным, как следствием преобразованием Абеля (15)

$$\sum_{n=0}^{N} a_n q^n = a_N B_N - a_0 C - \sum_{n=0}^{N-1} B_n \Delta\alpha_n ,$$

где

$$B_n = q^n + \ldots + q + 1 + C,\ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Доказательство. Применим преобразования Абеля (15) для конечного ряда к частичной сумме ряда (17)

$$\sum_{n=0}^{N} a_n q^n = a_N \left(C + 1 + q + \ldots + q^N\right) - a_0 C - \sum_{n=0}^{N-1}\left(C + 1 + q + \ldots + q^n\right)\Delta a_n = a_N \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} +$$

$$+ C\left(a_N - a_0\right) - \sum_{n=0}^{N-1}\left(C + \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)\Delta a_n = a_N \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} + C\left(a_N - a_0\right) - C\left(a_N - a_0\right) -$$

$$- \frac{a_N - a_0}{1 - q} + \frac{q}{1 - q}\sum_{n=0}^{N-1} q^n \Delta a_n = \frac{a_0 - a_N q^{N+1}}{1 - q} + \frac{q}{1 - q}\sum_{n=0}^{N-1} q^n \Delta a_n . \qquad (26)$$

Так как ряд (17) сходится, то $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N} a_n q^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n q^n = 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n q^{n+1} = 0$. Поэтому из (26) следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n \Delta a_n$ сходится и справедливо простое преобразование Эйлера (18)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n = \frac{a_0}{1 - q} + \frac{q}{1 - q}\sum_{n=0}^{\infty} q^n \Delta a_n .$$

Определение 6. *Преобразованием Эйлера ряда* (17) *называется следующий ряд*

$$E\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(1 - q)^{n+1}} \Delta^n a_0, \quad q \neq 1 . \qquad (27)$$

Преобразование Эйлера ряда (17) можно формально рассматривать как применённое к ряду (17) бесконечное число раз простое преобразование Эйлера. Сам Эйлер в этом не сомневался (правда, он получил ряд (27) способом, отличным от нашего) и считал, что у ряда (17) и ряда (27) одна и та же сумма. Тем не менее, этот факт требует доказательства.

Часто удобно рассматривать преобразование Эйлера, заменив $q \to -q$. Тогда ряд (17) переходит в знакочередующуюся форму, причём величина $a_n q^n$ может иметь любой знак

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n q^n \,. \tag{28}$$

Сходящийся ряд (22) переходит в сходящийся при $q \neq -1$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n q^n = \frac{a_0}{1+q} - \frac{q\Delta a_0}{\left(1+q\right)^2} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{q^{k-1}\Delta^{k-1}a_0}{\left(1+q\right)^k} + \frac{(-1)^k q^k}{\left(1+q\right)^k}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^n \Delta^k a_n \,, \tag{29}$$

а преобразование Эйлера вместо (27) принимает вид

$$E\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n q^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{(1+q)^{n+1}}(-1)^n \Delta^n a_0, \quad q \neq -1 \,. \tag{30}$$

Для дальнейшего изложения нам понадобится теорема Сильвермана – Тёплица [5, 6] в варианте, изложенном в [7, с. 355].

Теорема 3. (Теорема Сильвермана – Тёплица). *Предположим,* что элементы t_{nk} $(n = 0, 1, 2, \ldots,\ 0 \le k \le n)$ *правой треугольной бесконечной матрицы T с двумя входами удовлетворяют условиям*:

1) *Элементы*, *стоящие в любом столбце k*, *стремяться к нулю*:

$$t_{nk} \to 0 \ \textit{при} \ n \to \infty \ (k \ \textit{фиксировано}).$$

2) *Суммы абсолютных величин элементов*, *стоящих в любой строке*, *ограничены все одной и той же постоянной K*:

$$\left|t_{n0}\right| + \left|t_{n1}\right| + \ldots + \left|t_{n\,n-1}\right| + \left|t_{nn}\right| \le K \,.$$

Тогда, *если последовательность* $r_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то это же справедливо относительно последовательности*

$$R_n = t_{n0}r_0 + t_{n1}r_1 + \ldots + t_{nn}r_n \,,$$

составленной как линейная комбинация из членов последовательности $\{r_n\}$ *с коэффициентами из элементов матрицы T*.

Доказательство. Для произвольного вещественного сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное число N_ε, что для всех натуральных чисел $n > N_\varepsilon$ будет выполняться неравенство $\left|r_n\right| < \dfrac{\varepsilon}{2K}$. Для таких номеров *n* будем иметь

$$0<\left|R_n\right|\le\left|t_{n0}r_0+t_{n1}r_1+\ldots+t_{nN_\varepsilon}r_{N_\varepsilon}\right|+\left|t_{nN_\varepsilon+1}\right|\left|r_{nN_\varepsilon+1}\right|+\ldots+\left|t_{nn}\right|\left|r_n\right|,$$

или

$$0<\left|R_n\right|\le\left|t_{n0}r_0+t_{n1}r_1+\ldots+t_{nN_\varepsilon}r_{N_\varepsilon}\right|+\left(\left|t_{nN_\varepsilon+1}\right|+\ldots+\left|t_{nn}\right|\right)\frac{\varepsilon}{2K}. \qquad (31)$$

Из условия 2) имеем $\left|t_{nN_\varepsilon+1}\right|+\ldots+\left|t_{nn}\right|\le\left|t_{n0}\right|+\ldots+\left|t_{nN_\varepsilon+1}\right|+\ldots+\left|t_{nn}\right|\le K$. Используя эту оценку, мы можем теперь упростить неравенство (31)

$$0<\left|R_n\right|<\left|t_{n0}r_0+t_{n1}r_1+\ldots+t_{nN_\varepsilon}r_{N_\varepsilon}\right|+\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (32)$$

Так как по условию теоремы $t_{nk}\to 0$ при условии $n\to\infty$ для конечного числа значений k $(k=0,1,2,\ldots,N_\varepsilon)$, то их линейная комбинация будет иметь предел $t_{n0}r_0+t_{n1}r_1+\ldots+t_{nN_\varepsilon}r_{N_\varepsilon}\to 0$ при условии $n\to\infty$. В таком случае, для выбранного выше значения ε, всегда найдётся такое число M_ε, что для всех $n>M_\varepsilon$ будет выполняться неравенство

$$\left|t_{n0}r_0+t_{n1}r_1+\ldots+t_{nN_\varepsilon}r_{N_\varepsilon}\right|<\frac{\varepsilon}{2(M_\varepsilon+1)}.$$

Подставляя это неравенство в формулу (32), получим

$$0<\left|R_n\right|<\frac{\varepsilon}{2(M_\varepsilon+1)}(M_\varepsilon+1)+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\ n>Q_\varepsilon=\max\left(M_\varepsilon,N_\varepsilon\right).$$

Отсюда следует, что $R_n\to 0$ при условии $n\to\infty$. Теорема доказана.

Докажем теперь теорему, которая указывает при каких условиях преобразованный по Эйлеру ряд (30) сходится к ряду (28).

Теорема 4. *Если действительный ряд* (28) *сходится для некоторого значения* $q\ge 0$, *то и действительный ряд* в правой части формулы (30) *сходится для того же значения* q, *причём их суммы равны*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n q^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{(1+q)^{n+1}}(-1)^n\Delta^n a_0. \qquad (33)$$

Доказательство. Если $q=0$, то равенство (33) очевидно, так как оба ряда будут иметь сумму, равную нулю. Пусть теперь ряд (28) сходится для некоторого значения $q > 0$. Воспользуемся формулой (29) и обозначим через $R_k(q)$ последнее слагаемое в правой части этой формулы

$$R_k(q) = \frac{(-1)^k q^k}{\left(1+q\right)^k} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^n \Delta^k a_n, \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{34}$$

Так как ряд (28) сходится, то из формулы (29) следует, что ряд (34) так же сходится. Докажем теперь, что в случае $q > 0$

$$\lim_{k\to\infty} R_k(q) = 0. \tag{35}$$

Воспользуемся формулой (11) для разности $\Delta^k a_n$ и подставим её в (34), тогда получим

$$R_k(q) = \frac{(-1)^k q^k}{\left(1+q\right)^k} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^n \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m a_{n+k-m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Поменяем здесь местами операции суммирования, что допустимо, так как в силу сходимости ряда (28) все бесконечные суммы $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m C_k^m a_{n+k-m} q^{n+k}$ сходятся для фиксированного целого неотрицательного числа k и $m = 0, 1, 2, \dots, k$. После элементарных преобразований получим

$$R_k(q) = \frac{1}{\left(1+q\right)^k} \sum_{m=0}^{k} C_k^m q^m \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+k-m} a_{n+k-m} q^{n+k-m} . \tag{36}$$

Обозначим через $r_n(q)$ остаток сходящегося ряда (28)

$$r_n(q) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+n} a_{k+n} q^{k+n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, . \tag{37}$$

В таком случае $r_n(q) \to 0$ при условии $n \to \infty$. Подставим теперь (37) в (36)

$$R_k(q) = \frac{1}{\left(1+q\right)^k} \sum_{m=0}^{k} C_k^m q^m r_{k-m}(q) .$$

Отсюда, положив $s = k - m$ и помня, что $C_k^s = C_k^{k-s}$, получим

$$R_k(q) = \frac{1}{\left(q+1\right)^k} \sum_{s=0}^{k} C_k^s q^{k-s} r_s(q) . \tag{38}$$

Введём теперь новые величины

$$t_{ks} = \frac{C_k^s q^{k-s}}{(q+1)^k}, \quad k = 0, 1, 2, ... \quad s = 0, 1, 2, ..., k. \tag{39}$$

Учитывая, что $q > 0$, для величин t_{ks} получаем оценку

$$0 < t_{ks} = \frac{k(k-1)...(k-s+1)}{q^s s!\left(1+1/q\right)^k} < \frac{1}{q^s s!} \frac{k^s}{\left(1+1/q\right)^k}, \quad k = 1, 2, 3, ... \quad s = 1, 2, 3, ..., k. \tag{40}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty$ для любого действительного числа $a > 1$ и любого натурального числа k [8, с. 76], то $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k^s}{\left(1+1/q\right)^k} = 0$. В таком случае, с учётом двойного неравенства (40), получим, что

$$\lim_{k\to\infty} t_{ks} = 0. \tag{41}$$

Из биноминальной теоремы, которую в России по традиции ошибочно продолжают называть формулой бинома Ньютона, следует, что величины t_{ks} удовлетворяют равенству

$$\left|t_{k0}\right| + \left|t_{k1}\right| + ... + \left|t_{k\,k-1}\right| + \left|t_{kk}\right| = \frac{\sum\limits_{s=0}^{k} C_k^s q^{k-s}}{(q+1)^k} = \frac{(q+1)^k}{(q+1)^k} = 1, \quad q > 0, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{42}$$

Из формул (40) и (42) следует, что условия теоремы Сильвермана – Тёплица выполнены, поэтому $R_k(q) \to 0$ при $k \to \infty$. Теорема 4 доказана.

Замечание. Предложенное доказательство в основном совпадает с доказательством, изложенным в [7, с. 418]. Мы лишь исправили одну опечатку и более подробно изложили отдельные «тонкие места».

5. Заключение. Введено понятие простого преобразования Эйлера бесконечного числового ряда. С использованием этого понятия доказана теорема Эйлера о сумме арифметико-геометрической прогрессии k рода. Установлена связь между простым преобразованием Эйлера бесконечного ряда и преобразованием Абеля бесконечного ряда. Показано, что преобразование Эйлера можно рассматривать, как преобразование, при котором бесконечный ряд подвергается простому преобразованию Эйлера бесконечное число раз.

Приведены условия, выполнение которых достаточно для справедливости преобразования Эйлера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. - М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. – с. 580.

2. Abel N.H. Untersuchungen über die Reihe J. für reine und angew. Math. 1826, Bd. 1, S. 311–339.

3. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. 3-е изд., исправ. - М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. литер., 1966. – 664 с.

4. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литер., 1975. – 632 с.

5. Silverman L.L. On the definitions of the sum of a divergent series. University of Missouri Studies, Math. Series, 1913, Vol. I, No 1, pp. 1–96

6. Toeplitz O. Über die lineare Mittelbildungen. Prace mat.-fiz., 22, (1911), 113–118

7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 2. – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 864 с.

8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т1. – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 680 с.

REFERENCES

1. Eyler L. Differentsialnoe ischislenie. M.-L.: GITTL, 1949. – s. 580.

2. Abel N.H. Untersuchungen über die Reihe J. für reine und angew. Math. 1826, Bd. 1, S. 311–339.

3. Demidovich B.P., Maron I.A. Osnovy vychislitelnoy matematiki. 3-e izd., isprav. M.: Nauka, gl. red. fiz.-mat. liter., 1966. – 664 s.

4. Bakhvalov N.S. Chislennye metody (analiz, algebra, obyknovennye differentsialnye uravneniya). – M.: Nauka, Gl. red. fiz.-mat. liter., 1975. – 632 s.

5. Silverman L.L. On the definitions of the sum of a divergent series. University of Missouri Studies, Math. Series, 1913, Vol. I, No 1, pp. 1–96

6. Toeplitz O. Über die lineare Mittelbildungen. Prace mat.-fiz., 22, (1911), 113–118

7. Fikhtengolts G.M. Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya. V 3 t. T2. – 8-e izd. – M.: FIZMATLIT, 2003. – 864 s.

8. Fikhtengolts G.M. Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya. V 3 t. T1. – 8-e izd. – M.: FIZMATLIT, 2003. – 680 s.

ABOUT THE CONNECTION BETWEEN EULER'S TRANSFORMATION AND ABEL'S TRANSFORM OF INFINITE SERIES

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

The notion of simple Euler's transformation of an infinite series is introduced. With the use of this notion Euler's theorem about the sum of the arithmetic-geometric progression of k-th kind is proved. The connection between simple Euler's transformation of an infinite series and Abel's transform of an infinite series is established and it is proved that a series transformed by Euler, can easily be reduced to a series transformed by Abel. It is shown that Euler's transformation can be considered as a transformation by which an infinity series undergoes the simple Euler's transformation infinite number of times. The conditions which the implementation is sufficient for the validity of Euler's transformation is presented.`

Key words: infinite series, Euler's transform of infinite series, Abel's transform of infinite series, arithmetic-geometric progression, finite first difference, finite second difference.