517.521

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРИЗНАКА СХОДИМОСТИ И ЕГО СВЯЗЬ С ПРИЗНАКАМИ СГУЩЕНИЯ

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Существует определённая связь между интегральным признаком сходимости и признаками сгущения. Установление этой связи посвящается данная статья. Используя дискретные аналоги несобственного интеграла, получен дискретный признак сходимости положительного бесконечного ряда с монотонно убывающими членами. Дана геометрическая интерпретация этого признака и отмечено, что его мог легко открыть Маклорен в 40-х годах восемнадцатого столетия. На основе этого признака установлен дискретный аналог интегрального признака сходимости бесконечного ряда. С помощью последнего, без обращения к классическому интегральному признаку сходимости, выведены два признака сгущения – показательный признак сгущения и степенной признак сгущения, которые являются обобщением классических признаков сгущения Коши, Бертрана и Шлёмильха.

Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, бесконечный положительный числовой ряд, признак сгущения Коши, признак сгущения Бертрана, признак сгущения Шлёмильха, интегральный признак сходимости.

1. Введение. Среди известных на данный момент признаков сходимости бесконечных положительных рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \quad a_n > 0,\ n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

с монотонно убывающими членами

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots \tag{2}$$

можно выделить интегральный признак сходимости Маклорена – Коши [1, p. 289, 2, p. 222 - 223] и признаки сгущения, например Коши [3, p. 135], Бертрана [4, p. 234 - 235], Шлёмильха [5], Фабри [6, p. 44] и Кноппа [7, s. 116]. В известных книгах по бесконечным рядам [7, 8] эти признаки рассматриваются как совершенно разные.

Тем не менее, связь между этими признаками существует. Например, интегральный признак и признак сгущения используются для исследования сходимости знаменитой серии Бертрана [4, p. 236 – 237, 9, p. 6]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\mu}},\ \sum_{n=[e^0]+1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\mu}n},\ \sum_{n=[e]+1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln^{\mu}\ln n},\ \sum_{n=[e^e]+1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)\ln^{\mu}(\ln(\ln n))},\ \ldots,\ (3)$$

все ряды в которой сходятся для $\mu > 1$ и расходятся для $\mu \le 1$. Установление этой связи посвящается данная статья.

2. Дискретный признак сходимости положительного бесконечного ряда с монотонно убывающими членами. Пусть, как и в предыдущей нашей статье «*Общий и основной признаки сгущения сходимости положительного бесконечного ряда с монотонно убывающими членами*» [9], функция $f(x)$ определена, непрерывна, положительна и монотонно убывает на бесконечном промежутке $[1,\infty)$ и с рядом (1), подчиняющимся условию (2), она связана соотношением

$$f(n) = a_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{4}$$

Так что ряд (1) совпадает с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n). \tag{5}$$

Напомним, что бесконечное и неограниченное множество точек T_{λ}

$$1 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots, \quad \lim_{x\to\infty}\lambda_n = +\infty .$$

называется разбиением промежутка $[1,\infty)$ [9]. Справедлив следующий признак сходимости, который мы будем называть *дискретным признаком*:

Дискретный признак сходимости бесконечного положительного ряда с монотонно убывающими членами. *Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна, положительна и монотонно убывает на бесконечном промежутке $[1,\infty)$. Пусть T_{λ} - некоторое разбиение промежутка $[1,\infty)$. Тогда*

а) *если ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda_n)(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \qquad (6)$$

сходится, то для любого второго разбиения T_μ *промежутка* $[1, \infty)$ *ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\mu_{n+1})(\mu_{n+1} - \mu_n) \qquad (7)$$

так же сходится;

б) *если ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda_{n+1})(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \qquad (8)$$

расходится, то для любого второго разбиения T_μ *промежутка* $[1, \infty)$ *ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\mu_n)(\mu_{n+1} - \mu_n) \qquad (9)$$

так же расходится.

Доказательство. Обозначим через T_η произведение двух разбиений T_λ и T_μ. Напомним, что разбиение T_η будет в таком случае являться размельчением обоих разбиений T_λ и T_μ [9].

Пусть ряд (6) сходится. Тогда согласно общему признаку сгущения [9] будет сходиться ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\eta_n)(\eta_{n+1} - \eta_n). \qquad (10)$$

Так как разбиение T_η является размельчением разбиения T_μ, то из сходимости ряда (10) согласно тому же общему признаку сгущения [9] будет следовать сходимость ряда (7).

Пусть ряд (8) расходится. Тогда согласно общему признаку сгущения [9] будет расходиться ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\eta_n)(\eta_{n+1} - \eta_n). \qquad (11)$$

Так как разбиение T_η является размельчением разбиения T_μ, то из расходимости ряда (11) согласно тому же общему признаку сгущения [9] будет следовать расходимость ряда (9).

Если в доказанном признаке заменить разбиение T_μ разбиением T_n, в котором последовательность вещественных узлов μ_n заменена натуральными узлами n, то получим очевидное следствие.

Следствие (из дискретного признака сходимости бесконечного положительного ряда с монотонно убывающими членами). *Пусть функция* $f(x)$ *определена, непрерывна, положительна и монотонно убывает на бесконечном промежутке* $[1,\infty)$. *Пусть* T_λ *- некоторое разбиение промежутка* $[1,\infty)$. *Тогда*

а) *из сходимости ряда* (6) $\sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda_n)(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$ *следует сходимость ряда* (5) $\sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)$;

б) *из расходимости ряда* (8) $\sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda_{n+1})(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$ *следует расходимость ряда* (5) $\sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)$;

в) *из сходимости ряда* (5) $\sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)$ *следует сходимость ряда* (8) $\sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda_{n+1})(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$;

г) *из расходимости ряда* (5) $\sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)$ *следует расходимость ряда* (6) $\sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda_n)(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$.

Во введении мы отметили интегральный признак сходимости Маклорена – Коши бесконечного положительного ряда с монотонно убывающими членами. Удивительно, что Маклорен, первый предложивший этот признак в геометрической форме в 1742 году [1, p. 289], не заметил дискретный признак сходимости, который прямо следовал из его геометрических рассуждений.

Действительно, в случае а) ряд (6) $\sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda_n)(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$ сходится, тогда его сумма равна площади ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников с основанием $\lambda_{n+1}-\lambda_n$ и высотой $f(\lambda_n)$. Эта ступенчатая фигура описана около криволинейной трапеции, образованной графиком функции $f(x)$ и опирающейся на промежуток $[1,\infty)$. Следовательно, площадь криволинейной трапеции равна несобственному интегралу $\int_1^{\infty} f(x)dx$. В таком случае площадь любой вписанной многоступенчатой фигуры будет конечной. Одна из таких вписанных многоступенчатых фигур состоит из прямоугольников с основанием $\mu_{n+1}-\mu_n$ и высотой $f(\mu_{n+1})$. Так как её площадь равна сумме бесконечного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} f(\mu_{n+1})(\mu_{n+1}-\mu_n)$, то последний ряд сходится.

В случае б) ряд (7) $\sum_{n=0}^{\infty} f(\mu_{n+1})(\mu_{n+1}-\mu_n)$ расходится. Поэтому площадь ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников с основанием $\mu_{n+1}-\mu_n$ и высотой $f(\mu_{n+1})$, будет так же бесконечно большой. Эта ступенчатая фигура вписана в криволинейной трапеции, образованной графиком функции $f(x)$ и опирающейся на промежуток $[1,\infty)$. Следовательно, площадь криволинейной трапеции, равная несобственному интегралу $\int_1^{\infty} f(x)dx$, будет бесконечно большой. В таком случае площадь любой описанной около криволинейной трапеции многоступенчатой фигуры будет бесконечно большой. Одна из таких описанных многоступенчатых фигур состоит из прямоугольников с основанием

$\lambda_{n+1}-\lambda_n$ и высотой $f(\lambda_n)$. Так как её площадь равна сумме бесконечного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda_n)(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$, то последний ряд расходится.

3. Дискретный аналог интегрального признака сходимости бесконечного ряда. Из доказанного выше дискретного признака сходимости бесконечного положительного ряда с монотонно убывающими членами вытекает следующее важное следствие:

Следствие (из дискретного признака сходимости). *Пусть функция* $f(x)$ *определена*, *непрерывна*, *положительна и монотонно убывает на бесконечном промежутке* $[1,\infty)$. *Пусть* T_λ *и* T_μ *два разбиения промежутка* $[1,\infty)$, *которые подчиняются условиям Кноппа*

$$0<\lambda_{n+1}-\lambda_n \le L\left(\lambda_n-\lambda_{n-1}\right), \quad n=1,2,3,..., \tag{12}$$

$$0<\mu_{n+1}-\mu_n \le L\left(\mu_n-\mu_{n-1}\right), \quad n=1,2,3,.... \tag{13}$$

Тогда ряды (6), (7), (8) *и* (9) *сходятся или расходятся одновременно*.

Доказательство. Пусть ряд (6) сходится, тогда, согласно дискретному признаку сходимости, ряд (7) сходится. Ряд (8) сходится по признаку сравнения. Поскольку выполнено условия Кноппа (13), то в таком случае сходится ряд (9).

Пусть ряд (7) сходится. Поскольку выполнено условия Кноппа (13), то сходится ряд (9). Тогда, согласно дискретному признаку сходимости, ряд (8) сходится и, поскольку выполнено условия Кноппа (12), то сходится ряд (6).

Пусть ряд (8) сходится. Поскольку выполнено условия Кноппа (12), то сходится ряд (6) и, по доказанному выше, сходятся ряды (7) и (9).

Пусть ряд (9) сходится. Тогда, меняя местами в рассуждениях выше разбиения T_λ и T_μ, приходим к выводу, что все другие ряды сходятся.

Поскольку ряды (6), (7), (8) и (9) сходятся одновременно, то и расходиться они будут одновременно. Следствие доказано.

Из доказанного следствия, вытекает дискретный аналог интегрального признака сходимости бесконечного ряда.

Дискретный аналог интегрального признака сходимости. *Пусть функция* $f(x)$ *определена*, *непрерывна, положительна и монотонно убывает на бесконечном промежутке* $[1,\infty)$. *Пусть* T_λ *произвольное разбиение промежутка* $[1,\infty)$, *которое подчиняется условию Кноппа* (12)

$$0<\lambda_{n+1}-\lambda_n\le L\left(\lambda_n-\lambda_{n-1}\right),\quad n=1,2,3,\dots.$$

Тогда ряд (5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+\ldots$$

сходится или расходится одновременно с рядом (6)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda_n)(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$$

и рядом (8)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda_{n+1})(\lambda_{n+1}-\lambda_n).$$

Доказательство. Разбиение T_n, узлы которого являются натуральными числами, удовлетворяет неравенству Кноппа с константой $L=1$

$$0\le(n+1)-n\le 1\cdot(n-(n-1)).$$

Поэтому ряд (5)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)((n+1)-n)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n+1),$$

вместе с рядами

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)((n+1)-n)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n+2),$$

(6) и (8) удовлетворяют следствию из дискретного признака сходимости. Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f(n+2)$ одновременно является остатком ряда (5), то его сходимость или расходимость полностью определяется последним. Дискретный аналог интегрального признака сходимости доказан.

Как следствие, мы получаем из доказанного признака сходимости два других признака сходимости – *показательный признак сгущения* и *степенной признак сгущения.* Ранее эти признаки нами были доказаны с применением интегрального признака сходимости [10, 11].

Показательный признак сгущения. *Пусть функция* $f(x)$ *определена*, *непрерывна, положительна и монотонно убывает на бесконечном промежутке* $[1, \infty)$. *Тогда для любого вещественного числа* $a > 1$ *ряд* (5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + ... + f(n) + ...$$

сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n f(a^n). \tag{14}$$

Доказательство. Разбиение T_λ с узлами $\lambda_n = a^n$, $a > 1$, $n = 0, 1, 2, ...$ удовлетворяет неравенству Кноппа с константой $L = a$

$$0 \le a^{n+1} - a^n \le a \cdot (a^n - a^{n-1}).$$

Поэтому, согласно дискретному аналогу интегрального признака сходимости, ряд (5) $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ будет сходиться вместе с рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(a^n)(a^{n+1} - a^n) = (a-1)\sum_{n=0}^{\infty} a^n f(a^n).$$

Опустив множитель $a-1$, получим, что ряды (5) и (14) сходятся одновременно. Признак доказан.

В качестве примера применения показательного признака сгущения рассмотрим обобщённый ряд Бертрана

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log_a^{\sigma} n}, \quad a>1, \quad -\infty<\sigma<\infty. \tag{15}$$

Если $-\infty<\sigma\le 0$, то ряд расходится, так как $\frac{1}{n\log_a^{\sigma} n}\ge\frac{1}{n}$, $n\ge 2$. Пусть теперь $0<\sigma<\infty$. Тогда ряд (15) сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{a^n\log_a^{\sigma} a^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma}}, \quad a>1, \quad 0<\sigma<\infty.$$

Последний ряд, как известно, сходится в случае $0<\sigma<\infty$, и расходится для значений $0<\sigma\le 1$.

С т е п е н н о й   п р и з н а к   с г у щ е н и я. *Пусть функция* $f(x)$ *определена, непрерывна, положительна и монотонно убывает на бесконечном промежутке* $[1,\infty)$. *Тогда для любого положительного вещественного числа* $\alpha\ne 1$ *ряд* (5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=f(1)+f(2)+...+f(n)+...$$

сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n^{\alpha})n^{\alpha-1}. \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что ряд (16) сходится или расходится вместе с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n^{\alpha})((n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}),\ \alpha>0,\ \alpha\neq 1 \qquad (17)$$

согласно признаку сравнения, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}=\alpha,\ .$$

Установим одно полезное равенство, применяя формулу Коши [12, p. 182]:

$$0<\frac{(n+2)^{\alpha}-(n+1)^{\alpha}}{(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\alpha}-1}{1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{\alpha}}=\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^{\alpha-1},\ 0<\xi<\frac{1}{2}. \qquad (18)$$

Из формулы (18) следует, разбиение T_{λ} с узлами $\lambda_n=n^{\alpha}$, $n=1,2,3,...$ удовлетворяет неравенству Кноппа с константой $L=3^{\alpha-1}$, если $\alpha>1$ и с константой $L=1$, если $0<\alpha<1$. Применяя к ряду (5) дискретный аналог интегрального признака сходимости, приходим к выводу, что ряд (5) $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ будет сходиться вместе с рядом (17)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n^{\alpha})((n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}),\ \alpha>0,\ \alpha\neq 1,$$

а, следовательно, и вместе с рядом (16). Признак доказан.

В качестве примера применения степенного признака сгущения рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n}}{2^{\sqrt{n}}}. \qquad (19)$$

Ряд (19) сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n^2}\,(n^2)^{\frac{1}{2}-1}}{2^{\sqrt{n^2}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$$

Последний ряд, как известно, сходится. Следовательно, ряд (19) так же сходится.

3. Заключение. Итак, подведём итоги. Даламбер не доказывал признак, названный его именем. В цитируемой работе Даламбера, которую часто объявляют как содержащую доказательство этого признака, признак Даламбера отсутствует. Из работы Даламбера следует, что он сумел доказать сходимость биноминального ряда в случае $|\mu|<1$. Случай $\mu=\pm 1$ Даламбер не рассматривает. В случае $|\mu|>1$ расходимость правильно обосновывается неограниченным возрастанием *n*-го члена ряда с ростом *n* до бесконечности. Замечания Фихтенгольца и Юшкевича по работе Даламбера правильны. Из них следует, что теория бесконечных рядов для Даламбера остаётся во многом непонятной. Сам Даламбер в конце мемуаров об этом написал так:

ЛИТЕРАТУРА

1. Maclaurin C. Treatise on Fluxions. In Two Volumes. Vol. I, 2-nd ed. – London: Knight & Compton, 1801. – 413 p.

2. Cauchy A.L. Exercices de mathematiques. Seconde année. - Paris: 1827.-380 p.

3. Cauchy A.L. Cours d'analyse de l'École royale polytechnique I.re partie: Analyse algébrique. Paris, Impr. royale Debure frères, 1821, – XVI+576 p.

4. Bertrand J. Traité de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral. Premiére Partie Calcul Différentiel. – Paris: Gauthier-Villars, 1864. – 780 p.

5. Schlömilch O. Üeber dei gleichzeitige Convergenz oder Divergenz zweier Reihen. ZfMuP, 1873, B28, s. 425-426

6. Fabry E. Théorie des Séries a Termes Constants. Applications aux Calculs Numériques. – Paris: Hermann & Fils, 1910. – 198 p.

7. Knopp K. Theorie und anwendung der unendlichen reihen. – Berlin: Springer, 1922. – X+474 s.

8. Bromwich T.J.I. Introduction to the Theory of Infinite Series. – London: Macmillan and Com., 1908. – 511 p.

9. Терещенко И.В. Общий и основной признаки сгущения сходимости положительного бесконечного ряда с монотонно убывающими членами. Сб. материалов IV Международной научно-практической конференции «Автоматизированные информационные и электроэнергетические системы» 9-11 сентября 2016 года в ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет» [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2016. (В печати)

10. Терещенко И.В. Признаки сгущения II. Об обобщении признака сгущения Шлёмильха. Интегральный признак. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2014. № 5. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/226.

11. Терещенко И.В. Признаки сгущения III. Общий показательный признак сгущения. Доказательство, основанное на интегральном признаке сходимости Маклорена – Коши. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2014. № 5. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/232.

12. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.1. 6-е изд., стер. – Москва: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. – 441 с.

REFERENCES

1. Maclaurin C. Treatise on Fluxions. In Two Volumes. Vol. I, 2-nd ed. – London: Knight & Compton, 1801. – 413 p.

2. Cauchy A.L. Exercices de mathematiques. Seconde année. – Paris: 1827. – 380 p.

3. Cauchy A.L. Cours d'analyse de l'École royale polytechnique I.re partie: Analyse algébrique. Paris, Impr. royale Debure frères, 1821, – XVI+576 p.

4. Bertrand J. Traité de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral. Premiére Partie Calcul Différentiel. – Paris: Gauthier-Villars, 1864. – 780 p.

5. Schlömilch O. Üeber dei gleichzeitige Convergenz oder Divergenz zweier Reihen. ZfMuP, 1873, B28, s. 425-426

6. Fabry E. Théorie des Séries a Termes Constants. Applications aux Calculs Numériques. – Paris: Hermann & Fils, 1910. – 198 p.

7. Knopp K. Theorie und anwendung der unendlichen reihen. – Berlin: Springer, 1922. – X+474 s.

8. Bromwich T.J.I. Introduction to the Theory of Infinite Series. – London: Macmillan and Com., 1908. – 511 p.

9. Tereshhenko I.V. Obshhij i osnovnoj priznaki sgushhenija shodimosti polozhitel'nogo beskonechnogo rjada s monotonno ubyvajushhimi chlenami. Sb. materialov IV Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii «Avtomatizirovannye informacionnye i jelektrojenergeticheskie sistemy» 9-11 sentjabrja 2016 goda v FGBOU VO «Kubanskij gosudarstvennyj tehnologicheskij universitet» [Jelektronnyj resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: jelektron. setevoj politematich. zhurn. 2016. (V pechati)

10. Tereshhenko I.V. Priznaki sgushhenija II. Ob obobshhenii priznaka sgushhenija Shljomil'ha. Integral'nyj priznak. [Jelektronnyj resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: jelektron. setevoj politematich. zhurn. 2014. № 5. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/226.

11. Tereshhenko I.V. Priznaki sgushhenija III. Obshhij pokazatel'nyj priznak sgushhenija. Dokazatel'stvo, osnovannoe na integral'nom priznake shodimosti Maklorena – Koshi. [Jelektronnyj resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: jelektron. setevoj politematich. zhurn. 2014. № 5. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/232.

12. Fihtengol'c G.M. Osnovy matematicheskogo analiza. T.1. 6-e izd., ster. – Moskva: Nauka, gl. red. fiz.-mat. lit., 1968. – 441 s.

DISCRETE ANALOGUES OF INTEGRAL TEST CONVERGENCE AND IT IS RELATIONSHIP WITH CONDENSATION TESTS

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

There is a definite connection between the integral test of convergence and condensation tests. This article is dedicated to finding this connection. The geometric interpretation of this test is given and it is noted that it could be easily opened by Maclaurin in the 40s of the eighteenth century. The discrete analogue of the integral test of convergence of an infinite series was set on the basis of this test. With the help of the latter test, without recourse to the classical integral test of convergence, obtained two condensation's tests – the exponential condensation test and the power condensation test, which are generalization of the classic condensation tests of Cauchy, Bertrand and Schlömilch.

Key words: infinite series, a positive infinite series, Cauchy's condensation test, Bertrand's condensation test, Schlömilch's condensation test, integral test.