УДК 330.4:331.52

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В РЕГУЛИРОВАНИИ КОЛИЧЕСТВА РАБОЧИХ МЕСТ НА РЫНКЕ ТРУДА

С.В. КИСЛЯКОВ

Кубанский государственный технологический университет,
350002, Российская федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2,
электронная почта: ks03@list.ru

Предлагается использовать аппарат математической теории оптимального управления при разработке и осуществлении программ государственного регулирования рынка труда. Разработана математическая модель, основу которой составляет квадратичный функционал интегрального типа. Его минимизация позволяет достичь наименьшей разбалансированности рынка труда к концу заданного периода времени при условии минимальной суммарной разбалансированности за весь период. Рассмотрен один из вариантов модели рынка труда с применениеv методов математической теории оптимального управления для регулирования рынка труда. В качестве управляющей функции используется количество рабочих мест в отрасли. Регулирование количества рабочих требует достаточно больших затрат. Поэтому в качестве обязательного условия потребуем минимальных изменений количества рабочих мест относительно первоначальных пропорций. Наиболее полно поставленной цели с учетом приведенных требований отвечает квадратичный функционал.

Ключевые слова: рынок труда, математическая модель, оптимальное управление, регулирование рынка труда.

Современные условия развития рынка труда требуют активного государственного вмешательства. Процесс регулирования рынка труда представляет собой неотъемлемую составную часть и одновременно сложную подсистему рыночной экономики. С целью регулирования занятости и безработицы государство может применять целый комплекс методов, в частности экономические, административные, социально-психологические. Методы регулирования формируют два основных типа политики государства на рынке труда – активной и пассивной. Пассивная политика сводится к регистрации ищущих работу, определению размера пособий по безработице, разработке неденежных форм поддержки безработных и их семей. Активная политика включает в себя профессиональную подготовку и переподготовку кадров, изменение количества рабочих мест и ряд других мероприятий. Меры активной политики способствуют структурной перестройке экономики и требует значительных затрат, что делает весьма актуальной задачу их оптимизации.

С целью снижения затрат и повышения эффективности результатов активной политики предлагается при разработке и осуществлении программ государственного регулирования рынка труда использовать аппарат математической теории оптимального управления. В [1] разработана математическая модель, основу которой составляет квадратичный функционал интегрального типа. Его минимизация позволяет достичь наименьшей разбалансированности рынка труда к концу заданного периода времени при условии минимальной суммарной разбалансированности за весь период. В качестве функции управления используется емкость рынка рабочей силы (что отвечает задачам планирования подготовки и переподготовки кадров). В предлагаемой статье разработана аналогичная математическая модель рынка труда, но в качестве функции управления используется общее число рабочих мест в отрасли.

Рассмотрим математическую модель рынка труда, предложенную в [1]. Введем следующие обозначения. Пусть $y(t)$ - общее число рабочих мест в отрасли в момент времени t; $u(t)$ - емкость рынка рабочей силы отрасли. Тогда величину $x(t)=u(t)-y(t)$ можно рассматривать как показатель сбалансированности рынка труда в отрасли. Значение $x(t)=0$ говорит о сбалансированности рынка, величина $x(t)>0$ характеризует количество безработных, $x(t)<0$ - недостаток трудовых ресурсов отрасли. Пусть $q(t)$ - вероятность увольнения работника в момент времени t, $p(t)$ - вероятность того, что потенциальный работник сможет найти работу.

С учетом введенных обозначений получаем систему уравнений, описывающих динамику баланса рынка труда:

$$\dot{x}(t)=q(t)y(t)-p(t)x(t).$$

Полагая известными значения $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$, $u(0)=u_0$, определим цель: достичь минимальной разбалансированности рынка труда к концу заданного периода времени $t \in [0,T]$. При этом суммарная разбалансированность за весь период должна быть минимальной. В качестве функции управления будем рассматривать $y(t)$. Регулирование количества рабочих требует достаточно больших затрат. Поэтому в качестве обязательного условия потребуем минимальных изменений количества рабочих мест относительно первоначальных пропорций ($\Delta y(t) = y(t) - y_0 \to \min$). Поскольку отклонения функций $x(t)$ и $\Delta y(t)$ могут быть как положительными, так и отрицательными, в качестве показателей их отклонения от нулевых значений целесообразно использовать квадратичные зависимости.

Наиболее полно поставленной цели с учетом приведенных требований отвечает квадратичный функционал

$$\Im = \int_0^T \left(g_1(t) x^2(t) + g_2(t)(y(t) - y_0)^2 \right) dt + g_3 x^2(T) .$$

Здесь $g_1(t)$, $g_2(t)$, g_3 - функции приоритетов. В простейшем случае, когда все показатели равноправны, в качестве g_1, g_2, g_3 могут быть использованы единичные значения. В общем случае более важным показателям могут присваиваться более высокие «весовые» коэффициенты, что приведет к преимущественной оптимизации именно этих показателей. Зависимость от времени говорит о том, что приоритеты могут изменяться.

Возможны частные случаи задачи:

$g_1(t) \equiv 0$ - в этом случае ставится задача достижения оптимального значения $x(t)$ к заданному моменту времени T без требования суммарного минимального значения за период $[0,T]$;

$g_3 \equiv 0$ - ставится задача минимизации суммарной разбалансированности рынка труда за период времени $[0,T]$.

Значение $g_2(t) \equiv 0$ использовать нецелесообразно, поскольку в этом случае снимаются ограничения на управление и получаем тривиальное решение: $y^*(t) = u(t)$, $x^*(t) \equiv 0$.

Получаем математическую постановку задачи: минимизировать функционал

$$\Im = \int_0^T \left(g_1(t)x^2(t) + g_2(t)(y(t)-y_0)^2\right)dt + g_3 x^2(T)$$

на траекториях линейной системы

$$\dot{x}(t) = -p(t)x(t) + q(t)y(t)\,,\ t\in[0,T]\,,\ x(0)=x_0\,,\ y(0)=y_0\,,\ x\in R\,,\ y\in R\,.$$

Для построения решения задачи используем принцип максимума Л.С. Понтрягина [2,3].

Введем сопряженную переменную $\lambda(t)$ и сформируем функцию Гамильтона:

$$H(t,x(t),y(t),\lambda(t)) = -g_1(t)x^2(t) - g_2(t)(y(t)-y_0)^2 + \lambda(t)(-p(t)x(t)+q(t)y(t))\,.$$

Необходимые условия оптимальности задаются соотношениями

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0\,, \qquad \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}\,.$$

Построим оптимальное управление.

$$\frac{\partial H}{\partial y} = q(t)\lambda(t) - 2g_2(t)(y(t)-y_0) = 0\,,$$

отсюда

$$y^*(t) = y_0 + \frac{q(t)}{2g_2(t)}\lambda(t)\,.$$

Определяем оптимальную траекторию и сопряженную переменную. Подставляя $y^*(t)$ в уравнение системы, получаем:

$$\dot{x}(t) = -p(t)x(t) + q(t)y^*(t) = -p(t)x(t) + \frac{q^2(t)}{2g_2(t)}\lambda(t) + q(t)y_0\,.$$

Из необходимых условий оптимальности имеем:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = p(t)\lambda(t) + 2g_1(t)x(t).$$

Граничные условия для системы дифференциальных уравнений получаем из постановки задачи: $x(0) = x_0$ и условий трансверсальности: $\lambda(T) = -\frac{\partial}{\partial x} g_3 x^2(T) = -2g_3 x(T)$.

Таким образом, оптимальная траектория $x^*(t)$ и сопряженная переменная $\lambda(t)$ определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = -p(t)x(t) + \frac{q^2(t)}{2g_2(t)}\lambda(t) + q(t)y_0,$$

$$\dot{\lambda}(t) = p(t)\lambda(t) + 2g_1(t)x(t)$$

с граничными условиями $x(0) = x_0$, $\lambda(T) = -2g_3 x(T)$.

Выводы:

С целью снижения затрат и повышения эффективности результатов активной политики предлагается при разработке и осуществлении программ государственного регулирования рынка труда использовать аппарат математической теории оптимального управления. Разработана математическая модель, основу которой составляет квадратичный функционал интегрального типа. Его минимизация позволяет достичь наименьшей разбалансированности рынка труда к концу заданного периода времени при условии минимальной суммарной разбалансированности за весь период. В качестве функции управления используется общее число рабочих мест в отрасли (что отвечает задачам регулирования количества рабочих мест). В состав модели введены функции приоритетов, позволяющие присваивать более высокие «весовые» коэффициенты наиболее важным показателям. Зависимость этих функций от времени говорит о том, что приоритеты могут изменяться.

Для построения математического решения задачи используется принцип максимума Л.С. Понтрягина, что позволяет определить оптимальное управление из системы дифференциальных уравнений с заданными краевыми условиями.

Таким образом, разработаны средства информационной системы поддержки принятия решений, которые могут быть использованы при разработке и реализации государственных и региональных программ регулирования рынка труда, в том числе долгосрочных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кисляков С.В. Математическая модель оптимального управления рынком труда. //Научные труды КубГТУ, № 12, 2015. – http://ntk.kubstu.ru/file/704.

2. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. – 615 с.

3. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1979. – 396 с.

REFERENCES

1. Kislyakov S.V. Matematicheskaya model optimalnogo upravleniya rynkom truda. //Nauchnye trudy KubGTU, № 12, 2015. - http://ntk.kubstu.ru/file/704.

2. Afanas'ev V.N., Kolmanovskij V.B., Nosov V.R. Matematicheskaja teorija konstruirovanija sistem upravlenija (The mathematical theory of of designing control systems). M.: Vysshaja shkola, 2003. – 615 s.

3. Rojtenberg Ja.N. Avtomaticheskoe upravlenie (Automatic control) Automatic control. M.: Nauka, 1979. – 396 s.

APPLICATION OF THE THEORY OF OPTIMAL CONTROL IN REGULATION NUMBER OF JOBS IN THE LABOUR MARKET

S.V. KISLYAKOV

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350002;
e-mail: ks03@list.ru

It is proposed to use the apparatus of mathematical optimal control theory for the development and implementation of state regulation of the labor market programs. A mathematical model, which is based on the quadratic functional integral type. It allows for the minimization of the smallest imbalance in the labor market by the end of the specified time period, provided the minimum total imbalance for the entire period. Considered one of the variants of the labor market model c primeneniev mathematical methods of optimal control theory for the regulation of the labor market. As a control function uses the number of jobs in the industry. Adjusting the amount of working requires quite expensive. Therefore, as a mandatory conditions require minimal changes to the number of jobs relative to the original proportions. The most complete set goal, taking into account the above requirements are met by the quadratic functional.
Key words: labor market, mathematical model, optimal control, labor market regulation.