УДК 517.521

О ВЫЧИСЛЕНИИ СУММЫ КРАТНОГО РЯДА, ЧЛЕНЫ КОТОРОГО ПОДЧИНЯЮТСЯ УСЛОВИЮ СИММЕТРИЧНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350002, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

На основе частного примера вычисления суммы сходящегося двойного ряда, члены которого подчиняются условию симметричной факторизации, было найдено семейство таких двойных рядов и установлены условия их сходимости. Показано, что сходимость двойных рядов прямо связана со сходимостью некоторого положительного ряда. Аналогичное семейство рядов и условия симметричной факторизации были найдены для тройных рядов и для рядов произвольной кратности. Кроме этого были сформулированы и доказаны условия сходимости таких рядов. Оказалось, что и в этом случае сходимость кратного ряда связана со сходимостью некоторого положительного ряда.

Ключевые слова: бесконечный двойной числовой ряд, бесконечный положительный двойной числовой ряд, бесконечный тройной числовой ряд, бесконечный положительный тройной числовой ряд, бесконечный *k* кратный ряд.

1. Введение. В октябре 2016 года на странице “How to find this double summation?” сайта Mathematics Stack Exchange (http://math.stackexchange.com/questions/936620/how-to-find-this-double-summation?rq=1) найдена интересная формула, касающаяся вычисления суммы двойного ряда в замкнутой форме

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{nm^2}{3^m(n3^m+m3^n)}=\frac{9}{32}, \tag{1}$$

а так же её краткое доказательство, предложенное итальянским математиком Жаком Д’Ауризио (Jack D'Aurizio) с использованием, как он сам пишет, классического трюка, основанного на симметрии индексов суммирования членов ряда, или, другими словами, на равенстве, которому удовлетворяю члены ряда (1)

$$\frac{nm^2}{3^m(n3^m+m3^n)}+\frac{n^2m}{3^n(n3^m+m3^n)}=\frac{n}{3^n}\cdot\frac{m}{3^m}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{nm^2}{3^m(n3^m+m3^n)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\cdot\frac{m}{3^m}, \tag{3}$$

Сходимость ряда (3) следует из признака отношений, который часто не заслужено называют признаком Даламбера [1, с. 242]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1m}}{a_{nm}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}\cdot\frac{m}{3^m}}{\frac{n}{3^n}\cdot\frac{m}{3^m}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{a_{nm+1}}{a_{nm}}=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{n}{3^n}\cdot\frac{m+1}{3^{m+1}}}{\frac{n}{3^n}\cdot\frac{m}{3^m}}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{3}\frac{m+1}{m}=\frac{1}{3}.$$

Так как $\frac{1}{3}<1$, то ряд (3) сходится и его сумма равна сумме положительного двойного ряда, сумму которого легко свести к вычислению суммы повторного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{nm^2}{3^m(n3^m+m3^n)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\cdot\frac{m}{3^m}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{3^m}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\right)^2, \tag{4}$$

и которая является половиной квадрата суммы известного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{3^n}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{3^{n-1}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}+\frac{1}{2},$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}+\frac{1}{2}. \tag{5}$$

Откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}. \tag{6}$$

Подставляя (5) в (4), получаем формулу (1). Впрочем, Жак Д'Ауризио не обратил внимание на то, что можно было бы рассуждать в «обратном порядке».

Положительный ряд (6) сходится по признаку отношений (признак Даламбера). Его сумму можно вычислить с помощью рассуждений, приведших к формуле (5), из которой она вычисляется. Далее, перемножая ряд (6) сам на себя, мы приходим к сходящемуся положительному двойному ряду

$$\frac{9}{16}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m}{3^m}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\cdot\frac{m}{3^m}. \tag{7}$$

Так как (фактически мы здесь читаем формулу (2) справа налево)

$$\frac{n}{3^n}\cdot\frac{m}{3^m}=\frac{nm^2}{3^m(n3^m+m3^n)}+\frac{n^2m}{3^n(n3^m+m3^n)},$$

то из (7) следует, что

$$\frac{9}{16}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\cdot\frac{m}{3^m}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{nm^2}{3^m(n3^m+m3^n)}+\frac{n^2m}{3^n(n3^m+m3^n)}\right) \tag{8}$$

и, что положительный двойной ряд в крайней правой части сходится к сумме $9/16$. Так как очевидно, что

$$\frac{nm^2}{3^m(n3^m+m3^n)}\le\frac{nm^2}{3^m(n3^m+m3^n)}+\frac{n^2m}{3^n(n3^m+m3^n)},$$

то положительный двойной ряд (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{nm^2}{3^m(n3^m+m3^n)}$$

сходится. Меняя в последнем сходящемся положительном двойном ряде местами индексы и порядок суммирования, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{nm^2}{3^m(n3^m+m3^n)}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{mn^2}{3^n(m3^n+n3^m)}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{mn^2}{3^n(m3^n+n3^m)}.$$

Следовательно, в силу формулы (8), получаем формулу (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{nm^2}{3^m(n3^m+m3^n)}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{nm^2}{3^m(n3^m+m3^n)}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{mn^2}{3^n(m3^n+n3^m)}\right)=\frac{9}{32}.$$

Уже после того, как эта статья была готова, автор случайно обнаружил, что на странице *Double Series* сайта Wolfram MathWorld по адресу http://mathworld.wolfram.com/DoubleSeries.html выложено вычисление суммы этого ряда. Там же указана ссылка на книгу [2 p. 54], в которой сказано, что эта задача (Putnam problem 1999-A4) из Путманского математического соревнования 1999 года, традиционно приводящихся в США с 1927 года [3, p.265].

2. Вычисление суммы двойного ряда, члены которого подчиняются условию симметричной факторизации в общем случае. Ряд (1), ряд (6) и условие (2) являются частным случаем положительного двойного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm} \tag{9}$$

и положительного простого ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \tag{10}$$

члены которых удовлетворяют условию симметричной факторизации

$$a_{nm}+a_{mn}=\alpha_n\alpha_m,\quad \alpha_k>0,\ k=1,2,3,\dots . \tag{11}$$

Для таких рядов справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Двойной положительный ряд* (9) *и простой ряд* (10), *члены которых подчиняются условию симметричной факторизации* (11), *или вместе сходятся или вместе расходятся. В случае сходимости суммы этих положительных рядов связаны условием*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right)^2 \tag{12}$$

Доказательство. Пусть положительный двойной ряд (9) сходится, тогда сходится любой его повторный ряд и их суммы равны [4, с. 368]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{nm}\right). \tag{13}$$

Меняя в правой части формулы (13) индексы n и m местами, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{mn}\right). \tag{14}$$

Поскольку члены сходящегося повторного ряда в правой части формулы (14) положительны, то его сумма равна двойному ряду [4, с. 368]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{mn}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{mn}\,. \tag{15}$$

Из формул (14) и (15) следует, что в случае сходимости ряда (9) верно равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{mn}\,. \tag{16}$$

Отсюда, используя условию симметричной факторизации (11), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{mn}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_n\alpha_m\,, \tag{17}$$

Таким образом, положительный двойной ряд в правой части сходится формулы (17) сходится и, следовательно, сходится любой его повторный ряд [4, с. 368]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_n\alpha_m=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right)^2. \tag{18}$$

Итак, ряд (10) сходится. Из формул (17) и (18) следует равенство (12).

Пусть теперь сходится положительный простой ряд (10). Тогда квадрат его суммы будет равен сумме следующего положительного двойного ряда [4, с. 368]

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_n\alpha_m\,. \qquad (19)$$

Формула (19) есть не что иное, как формула (18), записанная наоборот. Из формулы (19) и условия симметричной факторизации (11) следует, что

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(a_{nm}+a_{mn})\,. \qquad (20)$$

Положительный ряд в правой части формулы (20) сходится. Так как верно неравенство $0\le a_{nm}\le a_{nm}+a_{mn}$, то будет сходиться ряд (9) $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}$. Тогда будет верно равенство (16) и выполняться равенство (17).

Итак, положительный двойной ряд (9) и положительный простой ряд (10) вместе сходятся. Следовательно, расходиться они могут только вместе. Теорема 1 доказана.

Пример 1. Если принять в ряде (9)

$$a_{nm}=\frac{nm^2q^nq^{2m}}{nq^n+mq^m},\quad 0<q<1, \qquad (21)$$

то условие симметричной факторизации (11) будет выполнено

$$a_{nm}+a_{mn}=\frac{nm^2q^nq^{2m}}{nq^n+mq^m}+\frac{n^2mq^{2n}q^m}{nq^n+mq^m}=nq^nmq^m=\alpha_n\alpha_m,\quad 0<q<1,\quad \alpha_n=nq^n\,.$$

Из теоремы 1 следует, что ряд (9) сходится, если сходится простой ряд (10), который принимает для примера 1 вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} nq^n, \quad 0 < q < 1. \tag{22}$$

Из признака отношений (признака Даламбера)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)q^{n+1}}{nq^n} = q\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = q < 1$$

следует, что ряд (22) сходится. Для вычисления его суммы воспользуемся равенством

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} nq^n = q\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)q^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} q^n, \quad 0 < q < 1,$$

которое сводит вычисление суммы ряда (22) к уравнению

$$S = qS + \frac{q}{1-q}, \quad 0 < q < 1, \tag{23}$$

из которого находим, что

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} nq = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad 0 < q < 1. \tag{24}$$

Подставляя формулу (24) в (12), получаем сумму ряда (9) с общим членом, задаваемым формулой (21)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{nm^2q^nq^{2m}}{nq^n + mq^m} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{(1-q)^4}, \quad 0 < q < 1. \tag{25}$$

Полагая здесь $q = 1/3$, получим ряд (1). К о н е ц п р и м е р а 1.

3. Вычисление суммы тройного ряда, члены которого подчиняются условию симметричной факторизации в общем случае. Теорему 1 несложно перенести на случай сходящихся положительных тройных рядов,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{nml}\,, \tag{26}$$

члены которого удовлетворяют условию симметричной факторизации

$$a_{nml}+a_{mln}+a_{lnm}=\alpha_n\alpha_m\alpha_l, \quad \alpha_k>0,\ k=1,2,3,\dots . \tag{27}$$

Теорема 2. *Тройной положительный ряд* (26) *и простой ряд* (10), *члены которых подчиняются условию симметричной факторизации* (27), *или вместе сходятся или вместе расходятся. В случае сходимости суммы этих положительных рядов связаны условием*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{nml}=\frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right)^3 \tag{28}$$

Доказательство. Пусть положительный тройной ряд (26) сходится, тогда сходится любой его повторный ряд и их суммы равны [5, с. 320]. Отсюда получаем равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{nml}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty}a_{nml}\right)\right). \tag{29}$$

Поменяем в правой части формулы (29) индексы, выполнив последовательно две циклические перестановки

$$n\to m,\ m\to l,\ l\to n; \quad m\to l,\ l\to n,\ n\to m\,.$$

Тогда получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{nml}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{mln}\right)\right)=\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{lnm}\right)\right). \tag{30}$$

Поскольку повторные ряды (30) положительного тройного ряда сходятся, то их можно суммировать в любом порядке, не меняя суммы ряда, то есть можно расставить знаки суммирования как угодно [5, с. 320]. Выберем исходный порядок суммирования

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{nml}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty}a_{mln}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty}a_{lnm}\right)\right). \quad (31)$$

Заменим теперь в формуле (31) суммы повторных рядов на равные им суммы тройных рядов [3, с. 320]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{nml}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{mln}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{lnm}\,. \quad (32)$$

Из формулы (32) получаем, используя условие симметричной факторизации (27), что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{nml}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{nml}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{mln}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{lnm}}{3}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\alpha_n\alpha_m\alpha_l}{3}, \quad (33)$$

Следовательно, крайний правый положительный тройной ряд в формуле (33) сходится, поэтому сходится любой его повторный ряд. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\alpha_n\alpha_m\alpha_l=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m\sum_{l=1}^{\infty}\alpha_l=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right)^3. \quad (34)$$

В таком случае, из формул (33) и (34) следует равенство (28).

Пусть теперь сходится положительный простой ряд (10). Тогда куб его суммы будет равен сумме следующего положительного тройного ряда

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right)^3=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m\sum_{l=1}^{\infty}\alpha_l=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m\left(\sum_{l=1}^{\infty}\alpha_l\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\alpha_n\alpha_m\alpha_l\,. \quad (35)$$

Аналогично случаю двойного ряда (см. формулы (18) и (19)), формула (35) есть не что иное, как формула (34), записанная наоборот. Из формулы (35) и условия симметричной факторизации (27) следует, что

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right)^3=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(a_{nml}+a_{mln}+a_{lnm})\,. \tag{36}$$

Таким образом, положительный ряд в правой части формулы (36) сходится. Так как верно неравенство $0\le a_{nml}\le a_{nml}+a_{mln}+a_{lnm}$, то будет сходиться ряд (26) $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{nml}$. Тогда будет верно равенство (32) и выполняться равенство (28).

Итак, положительный тройной ряд (26) и положительный простой ряд (10) вместе сходятся. Следовательно, расходиться они могут только вместе. Теорема 2 доказана.

Пример 2. Если принять в ряде (26)

$$a_{nml}=\frac{nml^2q^nq^mq^{2l}}{nq^n+mq^m+lq^l},\quad 0<q<1, \tag{37}$$

то условие симметричной факторизации (27) будет выполнено

$$a_{nml}+a_{mln}+a_{lnm}=\frac{nml^2q^nq^mq^{2l}}{nq^n+mq^m+lq^l}+\frac{n^2mlq^{2n}q^mq^l}{nq^n+mq^m+lq^l}+\frac{nm^2lq^nq^{2m}q^l}{nq^n+mq^m+lq^l}=$$

$$=nq^nmq^mlq^l=\alpha_n\alpha_m\alpha_l,\quad 0<q<1,\quad \alpha_n=nq^n\,.$$

Из теоремы 2 следует, что ряд (26) сходится, так как простой ряд (10) сходится. Его сумма была вычислена (см. формулу (24)) в примере 1. Подставляя формулу (24) в (34), получаем сумму ряда (26) с общим членом, задаваемым формулой (37)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{nml^2q^nq^mq^{2l}}{nq^n+mq^m+lq^l}=\frac{1}{3}\frac{q^3}{(1-q)^6},\quad 0<q<1\,. \tag{38}$$

Полагая здесь $q=1/2$, получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{nml^2}{2^l\left(n2^{m+l}+m2^{n+l}+l2^{n+m}\right)}=\frac{8}{3}. \tag{39}$$

Конец примера 2.

Пример 3. Если принять в ряде (26)

$$a_{nml}=\frac{n^2m^2lq^nq^mq^{2l}}{nmq^l+mlq^n+nlq^m},\quad 0<q<1, \tag{40}$$

то условие симметричной факторизации (27) будет выполнено

$$a_{nml}+a_{mln}+a_{lnm}=\frac{n^2m^2lq^nq^mq^{2l}}{nmq^l+mlq^n+nlq^m}+\frac{nm^2l^2q^{2n}q^mq^l}{nmq^l+mlq^n+nlq^m}+\frac{n^2ml^2q^nq^{2m}q^l}{nmq^l+mlq^n+nlq^m}=$$

$$=nq^nmq^mlq^l=\alpha_n\alpha_m\alpha_l,\quad 0<q<1,\quad \alpha_n=nq^n.$$

Применяя теорему 2, как и в примере 2, находим сумму ряда (26) с общим членом (40)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{n^2m^2lq^nq^mq^{2l}}{nmq^l+nlq^m+mlq^n}=\frac{1}{3}\frac{q^3}{(1-q)^6},\quad 0<q<1. \tag{41}$$

Полагая здесь $q=1/2$, получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{nml^2}{2^l\left(nm2^{n+m}+nl2^{n+l}+ml2^{m+l}\right)}=\frac{8}{3}. \tag{42}$$

Конец примера 3.

Пример 4. Если принять в ряде (26)

$$a_{nml}=\frac{n^2mlq^nq^{2m}q^{2l}}{nq^mq^l+mq^lq^n+lq^nq^m},\quad 0<q<1, \tag{43}$$

то условие симметричной факторизации (27) будет выполнено

$$a_{nml}+a_{mln}+a_{lnm}=\frac{n^2mlq^nq^{2m+2l}+nm^2lq^mq^{2n+2l}+nml^2q^{2n+2m}q^l}{nq^{m+l}+mq^{l+n}+lq^{n+m}}=$$

$$=nq^nmq^mlq^l=\alpha_n\alpha_m\alpha_l,\quad 0<q<1,\quad \alpha_n=nq^n.$$

Применяя теорему 2, как и в примерах 2 и 3, находим сумму ряда (26) с общим членом (43)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{n^2mlq^nq^{2m}q^{2l}}{nq^mq^l+mq^lq^n+lq^nq^m}=\frac{1}{3}\frac{q^3}{(1-q)^6},\quad 0<q<1. \tag{44}$$

Полагая здесь $q=1/2$, получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{n^2ml}{2^{m+l}\left(n2^n+m2^m+l2^l\right)}=\frac{8}{3}. \tag{45}$$

Конец примера 4.

4. Вычисление суммы *k-а* кратного ряда, члены которого подчиняются условию симметричной факторизации в общем случае. Покажем, что теорему 1 можно перенести на случай сходящихся положительных *k-а* кратных рядов

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=1}^{\infty}a_{n_1n_2\dots n_k}, \tag{46}$$

члены которого удовлетворяют условию симметричной факторизации, в котором в левой части равенства берётся сумма по всем *k-а* циклическим перестановкам индексов $n_1,n_2,\dots,n_k$

$$a_{n_1n_2\dots n_k}+a_{n_2n_3\dots n_1}\dots+a_{n_kn_1\dots n_{k-1}}=\alpha_{n_1}\alpha_{n_2}\dots\alpha_{n_k},\quad \alpha_p>0,\ p=1,2,3,\dots. \tag{47}$$

Теорема 3. *K-а кратный положительный ряд* (46) *и простой ряд* (10), *члены которых подчиняются условию симметричной факторизации* (47), *или* *вместе сходятся или вместе расходятся. В случае сходимости суммы этих положительных рядов связаны условием*

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\dots\sum_{n_k=1}^{\infty}a_{n_1n_2\dots n_k}=\frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right)^k \tag{48}$$

Доказательство. Пусть положительный *k-а* кратный ряд (46) сходится, тогда сходится любой его повторный ряд и их суммы равны. Отсюда получаем равенство

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\dots\sum_{n_k=1}^{\infty}a_{n_1n_2\dots n_k}=\sum_{n_1=1}^{\infty}\left(\sum_{n_2=1}^{\infty}\left(\dots\left(\sum_{n_k=1}^{\infty}a_{n_1n_2\dots n_k}\right)\right)\right). \tag{49}$$

Поменяем в правой части формулы (49) индексы, выполнив последовательно k циклических перестановок. Тогда получим

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\dots\sum_{n_k=1}^{\infty}a_{n_1n_2\dots n_k}=\sum_{n_2=1}^{\infty}\left(\sum_{n_3=1}^{\infty}\left(\dots\sum_{n_1=1}^{\infty}a_{n_2n_3\dots n_1}\right)\right)=\sum_{n_k=1}^{\infty}\left(\sum_{n_1=1}^{\infty}\left(\dots\sum_{n_{k-1}=1}^{\infty}a_{n_kn_1\dots n_{k-1}}\right)\right). \tag{50}$$

Поскольку повторные ряды (50) положительного k кратного ряда сходятся, то их можно суммировать в любом порядке, не меняя суммы ряда, то есть можно расставить знаки суммирования как угодно. Выберем исходный порядок суммирования

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\dots\sum_{n_k=1}^{\infty}a_{n_1n_2\dots n_k}=\sum_{n_1=1}^{\infty}\left(\sum_{n_2=1}^{\infty}\left(\dots\sum_{n_k=1}^{\infty}a_{n_2n_3\dots n_1}\right)\right)=\sum_{n_1=1}^{\infty}\left(\sum_{n_2=1}^{\infty}\left(\dots\sum_{n_k=1}^{\infty}a_{n_kn_1\dots n_{k-1}}\right)\right). \tag{51}$$

Заменим теперь в формуле (51) суммы повторных рядов на равные им суммы *k-а* кратных рядов

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\dots\sum_{n_k=1}^{\infty}a_{n_1n_2\dots n_k}=\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\dots\sum_{n_k=1}^{\infty}a_{n_2n_3\dots n_1}=\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\dots\sum_{n_k=1}^{\infty}a_{n_kn_1\dots n_{k-1}}\ . \tag{52}$$

Из формулы (52) получаем, используя условие симметричной факторизации (47), что

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\ldots\sum_{n_k=1}^{\infty}a_{n_1n_2\ldots n_k}=\frac{\sum\limits_{n_1=1}^{\infty}\sum\limits_{n_2=1}^{\infty}\ldots\sum\limits_{n_k=1}^{\infty}a_{n_1n_2\ldots n_k}+\ldots+\sum\limits_{n_1=1}^{\infty}\sum\limits_{n_2=1}^{\infty}\ldots\sum\limits_{n_k=1}^{\infty}a_{n_kn_1\ldots n_{k-1}}}{k}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{n_1=1}^{\infty}\sum\limits_{n_2=1}^{\infty}\ldots\sum\limits_{n_k=1}^{\infty}\alpha_{n_1}\alpha_{n_2}..\alpha_{n_k}}{k}, \tag{53}$$

Следовательно, крайний правый положительный *k-а* кратный ряд в формуле (53) сходится, поэтому сходится любой его повторный ряд. Тогда

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\ldots\sum_{n_k=1}^{\infty}a_{n_1n_2\ldots n_k}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{n_1}\sum_{n_2=1}^{\infty}\alpha_{n_2}\ldots\sum_{n_k=1}^{\infty}\alpha_{n_k}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right)^k. \tag{54}$$

В таком случае, из формул (53) и (54) следует равенство (48).

Пусть теперь сходится положительный простой ряд (10). Тогда *k*-я степень его суммы будет равен сумме следующего положительного *k*-а кратного ряда

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right)^k=\sum_{n_1=1}^{\infty}\alpha_{n_1}\sum_{n_2=1}^{\infty}\alpha_{n_2}\ldots\sum_{n_k=1}^{\infty}\alpha_{n_k}=\sum_{n_1=1}^{\infty}\left(\alpha_{n_1}\left(\ldots\sum_{n_k=1}^{\infty}\alpha_{n_k}\right)\right)=\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\ldots\sum_{n_k=1}^{\infty}\alpha_{n_1}\alpha_{n_2}\ldots\alpha_{n_k}. \tag{55}$$

Аналогично случаю двойного ряда (см. формулы (18) и (19)), формула (55) есть не что иное, как формула (54), записанная наоборот. Из формулы (55) и условия симметричной факторизации (47) следует, что

$$\frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right)^k=\frac{\sum\limits_{n_1=1}^{\infty}\sum\limits_{n_2=1}^{\infty}\ldots\sum\limits_{n_k=1}^{\infty}a_{n_1n_2\ldots n_k}+\ldots+\sum\limits_{n_1=1}^{\infty}\sum\limits_{n_2=1}^{\infty}\ldots\sum\limits_{n_k=1}^{\infty}a_{n_kn_1\ldots n_{k-1}}}{k}. \tag{56}$$

Таким образом, положительный ряд в правой части формулы (56) сходится. Так как верно неравенство $0\le a_{n_1n_2\ldots n_k}\le a_{n_1n_2\ldots n_k}+a_{n_2n_3\ldots n_1}+\ldots+a_{n_kn_1\ldots n_{k-1}}$, то будет сходиться ряд (46) $\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\ldots\sum_{n_k=1}^{\infty}a_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Тогда будет верно равенство (52) и выполняться равенство (48).

Итак, положительный k-а кратный ряд (46) и положительный простой ряд (10) вместе сходятся. Следовательно, расходиться они могут только вместе. Теорема 3 доказана.

5. Заключение. На основе частного примера вычисления суммы сходящегося двойного ряда, члены которого подчиняются условию симметричной факторизации, было найдено семейство таких двойных рядов и установлены условия их сходимости. Аналогичное семейство рядов и условия симметричной факторизации были найдены для тройных рядов и для рядов произвольной кратности. Кроме этого были сформулированы и доказаны условия сходимости таких рядов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьёв Н.Н. Теория рядов. 4-е изд., перераб. и допол. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литер., 1979. – 408 с.

2. Borwein J., Bailey D., Girgensohn R. Experimentation in Mathematics. Computational Paths to Discovery. - AK Peters, Natrick, Massashusetts, 2004. – 357 p.

3. Kedlaya K.S., Poonen B., Vakil R. The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985–2000. – MMA, 2002. – 337 p.

4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. TII / Пред. и прим. А.А. Флоринского. – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 864 с.

5. Терещенко И.В. К теории бесконечных числовых тройных рядов. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2016. № 11. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/1212.

REFERENCES

1. Vorobev N.N. Teoriya ryadov. 4-e izd., pererab. i dopol. – M.: Nauka, Gl. red. fiz.-mat. liter., 1979. – 408 s.

2. Borwein J., Bailey D., Girgensohn R. Experimentation in Mathematics. Computational Paths to Discovery. - AK Peters, Natrick, Massashusetts, 2004. – 357 p.

3. Kedlaya K.S., Poonen B., Vakil R. The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985–2000. – MMA, 2002. – 337 p.

4. Fikhtengolts G.M. Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya. V 3 t. TII / Pred. i prim. A.A. Florinskogo. – 8-e izd. – M.: FIZMATLIT, 2003. – 864 s.

5. Tereshchenko I.V. K teorii beskonechnykh chislovykh troynykh ryadov. [Elektronnyy resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2016. № 11. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/1212.

CALCULATING THE SUM OF MULTIPLE SERIES, WHOSE TERMS ARE SUBJECT TO CONDITIONS OF SYMMETRIC FACTORIZATION

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350002;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

On the basis of the example of calculating the sum of a convergent double series, whose terms are subject to the condition of symmetric factorization, it was found the family of double series and set conditions for their convergence. It is shown that the convergence of the double series is directly related to the convergence of a series with positive terms. A similar family of infinite series and conditions of symmetric factorization were found for triple series and series of an arbitrary multiplicity. In addition, it was formulated and proved the conditions of the convergence of such series. It turned out that in this case to the convergence of multiple series connected with the convergence of a series with positive terms.

Key words: infinite double series, a positive infinite double series, infinite triple series, a positive infinite triple series, infinite *k*-tuple series