УДК 62-50

ДИАГРАММА ВЫШНЕГРАДСКОГО В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MATLAB

А.В. НЕСТЕРОВ, С.В. НЕСТЕРОВ

Кубанский государственный технологический университет,
350002, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: briefkasten129@rambler.ru

Статья носит дидактический характер. Сформулированы две учебные задачи, решение которых предлагается направить на углублённое изучение теории автоматического управления и совершенствование вычислительных навыков. Первая задача заключается в построении диаграммы Вышнеградского. Вторая задача дополняет первую и сводится к нанесению на "основную" диаграмму линий равной степени устойчивости. Известные алгоритмы построения диаграммы Вышнеградского и линий равной степени устойчивости реализованы в системе компьютерной математики MATLAB. Средства управления графическими окнами системы MATLAB в свою очередь также служат решению поставленных задач. Для автоматического построения диаграммы Вышнеградского и линий равной степени устойчивости рекомендуется алгоритмы сохранять в М-файлах. Все этапы разработки сопровождаются подробными комментариями, которые можно использовать в лабораторном практикуме в качестве методических указаний.

Ключевые слова: диаграмма Вышнеградского, линии равной степени устойчивости.

Хорошо известны проблемы, с которыми сталкивается автор и разработчик электронного учебника, методических указаний и т.п. Одни из них связаны с текстом [1-3], другие – с графической частью. Далее рассматривается проблема создания последней. При этом также известно, как разнообразны графические материалы. Например, обычный учебник по теории автоматического управления (ТАУ) содержит схемы, временные и частотные характеристики, характеристики нелинейных элементов и т.д. [4]. Очевидно, что проще всего их отсканировать и поместить в этом виде в новый электронный учебник. С дидактической точки зрения такой учебник ничем не будет отличаться от обычного. Другой путь предлагает "оживить" графические материалы с помощью соответствующих компьютерных технологий. Целью этого должно быть решение автором каких-либо дидактических задач. В противном случае электронный учебник будет бесполезной игрушкой. Возможно, разработчики MATLAB думали об этом. Пакеты расширения этой системы, используемые при изучении ТАУ, содержат графические интерфейсы пользователя (GUI). Их можно поместить в текст электронного учебника и обеспечить их работу в режиме исполняемого файла.

Типичной является и другая ситуация, когда GUI отсутствует. Это относится к диаграмме Вышнеградского, годографу Михайлова и др. В этом случае MATLAB может восполнить этот недостаток своими средствами. При этом для решения дидактических задач достаточным могут быть средства управления графическим окном, в котором изображен график, а GUI – излишним. Это замечание справедливо для диаграммы Вышнеградского.

С позиции MATLAB диаграмма Вышнеградского – это совокупность четырех 2D-графиков, построенных на плоскости параметров Вышнеградского A и B (рисунок 1). Уравнения названных графиков и порядок их построения содержит общепринятый алгоритм, изложенный в работе [5] и др. Автоматизация этого алгоритма является целью данной работы.

В качестве исходных данных выступает характеристическое уравнение САУ в форме Вышнеградского

$$s^3 + As^2 + Bs + 1 = 0. \quad (1)$$

Очевидно, что коэффициенты Вышнеградского должны быть рассчитаны.

Самое простое уравнение описывает гиперболу Вышнеградского (кривая BA)

$$B \cdot A = 1.$$

График этой зависимости в MATLAB строят по уравнению

$$B = \frac{1}{A_1}.$$

Для удобства работы в MATLAB независимой переменной А присвоен индекс 1. Диапазон её изменения согласно [5]

$$0{,}1 \le A_1 \le 8.$$

Таким образом, чтобы построить гиперболу Вышнеградского ВА, необходимо выполнить действия согласно SCRIPT 1.

SCRIPT 1:

```
A1=0.1:0.1:8;
BA=1./A1;
plot(A1,BA); grid on
```

Результат здесь в виде отдельного рисунка не приводится. Кривая *BA* представлена на диаграмме Вышнеградского (рисунок 1).

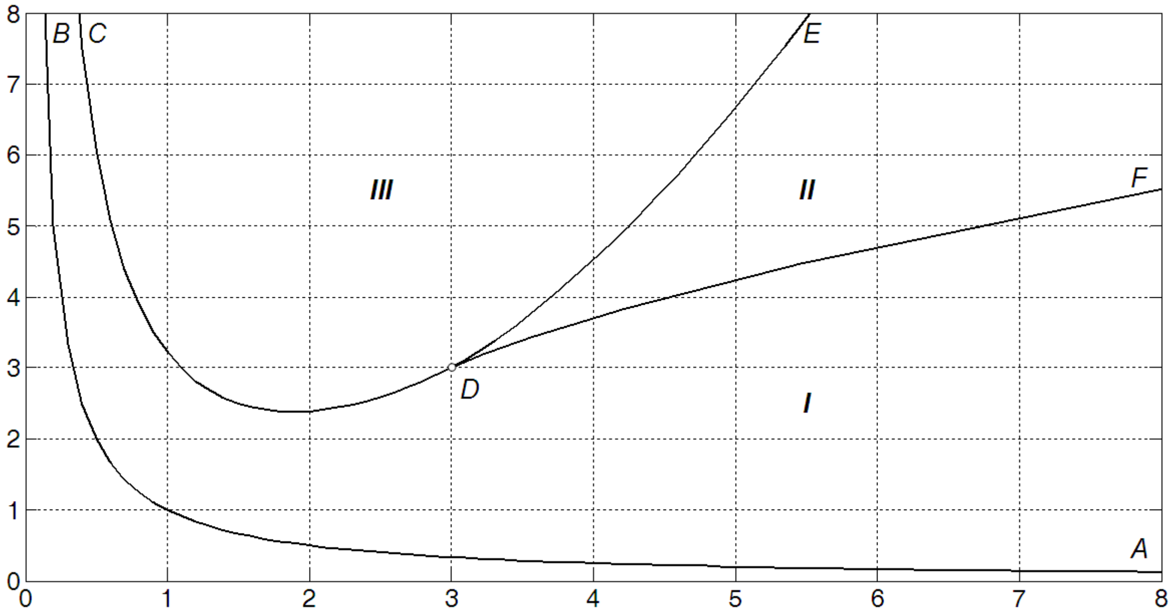

Рисунок 1 – Диаграмма Вышнеградского

Целиком SCRIPT 1 и следующие за ним SCRIPT 2 и SCRIPT 3 используют при отладке вычислительного процесса.

Кривая *CD* описывается уравнением

$$2A^3 - 9AB + 27 = 0.$$

График этой зависимости в MATLAB строят по уравнению

$$B = \frac{2A^3 + 27}{9A}.$$

При этом независимой переменной присвоен индекс 2. Диапазон изменения этого аргумента

$$0{,}3 \le A_2 \le 3\,.$$

Для построения кривой *CD* необходимо выполнить действия согласно SCRIPT 2.

SCRIPT 2:

```
A2=0.3:0.1:3;
CD=(2.*A.^3+27)./(9.*A2);
plot(A2,CD); grid on
```

Результат здесь в виде отдельного рисунка не приводится. Кривая CD представлена на диаграмме Вышнеградского (рисунок 1).

Кривые DE и DF (границы области апериодичности) описывают одним уравнением

$$A^2B^2-4(A^3+B^3)+18AB-27=0$$

или в параметрическом виде двумя уравнениями

$$A=\frac{1}{\eta^2}+2\eta;$$

$$B=\eta^2+\frac{2}{\eta},$$

где η – степень устойчивости (*eta*). Кривую *DE* получают при $\eta \geq 1$, график *DF* при $\eta \leq 1$.

Таким образом, чтобы построить границы DE и DF необходимо выполнить действия согласно SCRIPT 3.

SCRIPT 3:

```
eta3=1:0.1:2.4;
A3=1./eta3.^2+2.*eta3;
DE= eta3.^2+2./eta3;
eta4=0.37:0.1:1;
A4=1./eta4.^2+2.*eta4;
DF= eta4.^2+2./eta4;
plot(A3,DE,A4,DF); grid on
```

Результат здесь в виде отдельного рисунка не приводится. Кривые *DE* и *DF* представлены на диаграмме Вышнеградского (рисунок 1). Если графики граничных кривых построены верно (в сравнении с рисунком 6.4 [5]) и никаких исправлений не требуют, то можно построить диаграмму Вышнеградского целиком. Для этого достаточно удалить последние строки из SCRIPT 1 и SCRIPT 2, а "остатки" объединить со SCRIPT 3, отредактировав в нём последнюю строку согласно SCRIPT 4.

SCRIPT 4:

```
A1=0.1:0.1:8;
BA=1./A1;
A2=0.3:0.1:3;
CD=(2.*A.^3+27)./(9.*A2);
eta3=1:0.1:3.95;
A3=1./eta3.^2+2.*eta3;
DE= eta3.^2+2./eta3;
eta4=0.37:0.1:1;
A4=1./eta4.^2+2.*eta4;
DF= eta4.^2+2./eta4;
plot(A1,BA , A2,CD ,A3,DE,A4,DF); grid on
```

Результат выполнения SCRIPT 4 показан на рисунке 1; смотри также рисунок 6.4 из [5].

Диаграмму Вышнеградского можно дополнить линиями равной степени устойчивости, равной колебательности и равных наибольших значений модуля вещественной части корня. Построение этих линий может представлять собой самостоятельную учебную задачу. Исходные данные одинаковы для всех задач – характеристическое уравнение САУ в форме Вышнеградского (1) и коэффициенты A и B. Алгоритм решения каждой задачи изложен в [5]. Далее приводится решение первой из них.

Линии равной степени устойчивости образованы прямой D и кривой C линиями, пересекающимися в двух точках L и R (рисунок 2). Одна из них L, левая, лежит на граничной линии CD (рисунок 4). Прямая линия проходит через области II и III диаграммы Вышнеградского, а кривая линия целиком находится в области I. Уравнение прямой линии [5]

$$B = A\eta - \eta^2 + \frac{1}{\eta}. \tag{2}$$

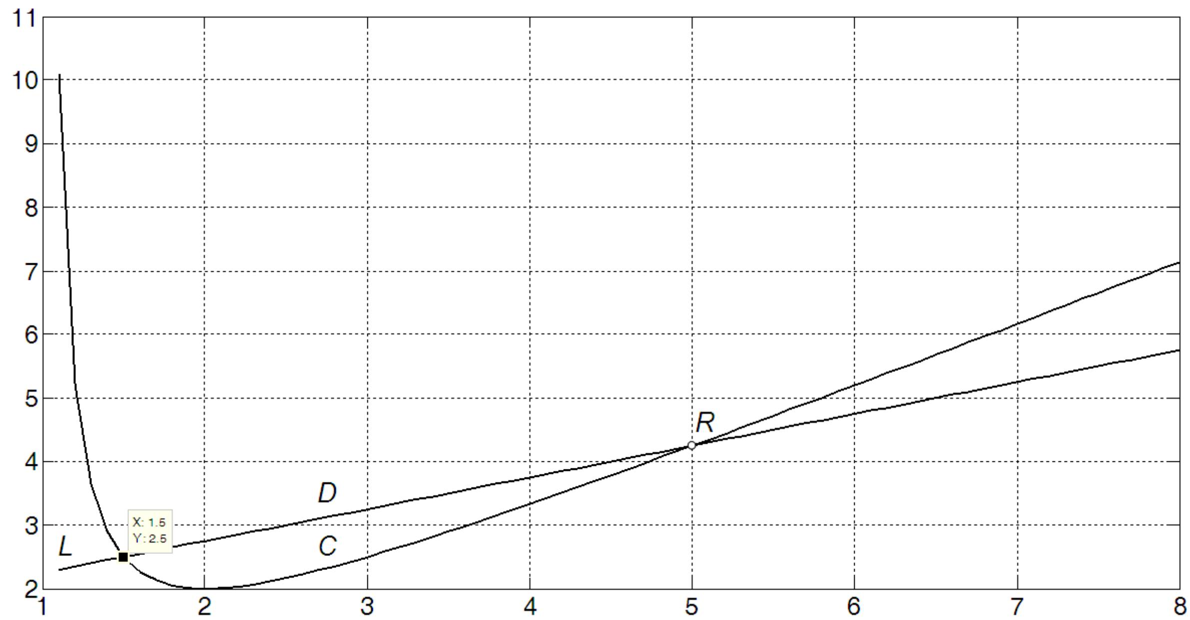

Рисунок 2 – Фрагмент диаграммы Вышнеградского

Уравнение кривой линии

$$B = \frac{1}{A - 2\eta} + 2\eta \cdot (A - 2\eta). \tag{3}$$

В этих уравнениях степень устойчивости является параметром и может принимать значения в диапазоне $0 \le \eta \le 1$. В частности, при $\eta = 0{,}5$

$$B_{051} = \frac{A_{05}}{2} + \frac{7}{4};$$
$$B_{052} = \frac{1}{A_{05} - 1} + A_{05} - 1. \tag{4}$$

Индексы 051 и 052 обусловлены особенностями MATLAB. Очевидно, что 05 соответствует степени устойчивости $\eta = 0{,}5$, а 1 и 2 обозначают прямой и криволинейный участки линии.

Координаты точек пересечения названных участков задают диапазон изменения независимой переменной в уравнениях (2), (3) и (4). Их рассчитывают следующим образом. Ясно, что в этих точках

$$B_{051} = B_{052}$$

и

$$\frac{A_{05}}{2} + \frac{7}{4} = \frac{1}{A_{05} - 1} + A_{05} - 1.$$

Последнее равенство равносильно квадратному уравнению

$$2A_{05}^2 - 13A_{05} + 15 = 0,$$

корни которого равны абсциссам левой и правой точек соответственно 1,5 и 5. Следовательно, в равенствах (4) необходимо принять 1,5 ≤ A_{05} ≤ 5,0.

Координаты точек пересечения двух линий можно определить также графически. Для этого их надо построить согласно SCRIPT 5, а затем найти искомые координаты с помощью курсора.

SCRIPT 5:

```
eta05=0.5;
A05=1.1:0.1:8;
B051=A05*eta05-eta05^2+1/eta05;
B052=1./(A05-2*eta05)+2*eta05.*(A05-2*eta05);
plot(A05,B051, A05,B052); grid on
```

Результат показан на рисунке 2. Как следует из показания всплывающего меню, абсцисса левой точки пересечения L равна 1,5. Правая точка R лежит непосредственно на координатной сетке. Ясно видно, что её абсцисса равна 5,0.

Таким образом, чтобы построить линию равной степени устойчивости при $\eta = 0{,}5$, необходимо исправить в SCRIPT 5 "начальное" значение независимой переменной $A_{05} = 1{,}1$ на найденное $A_{05} = 1{,}5$, а затем выполнить действия согласно SCRIPT 6.

SCRIPT 6:

```
eta05=0.5;
A05=1.5:0.1:8;
```

```
B051=A05*eta05-eta05^2+1/eta05;
B052=1./(A05-2*eta05)+2*eta05.*(A05-2*eta05);
plot(A05,B051, A05,B052); grid on
```

Результат, показанный на рисунке 3, необходим для отладки вычислительной процедуры. Его следует сравнить с рисунком 6.4 из [5].

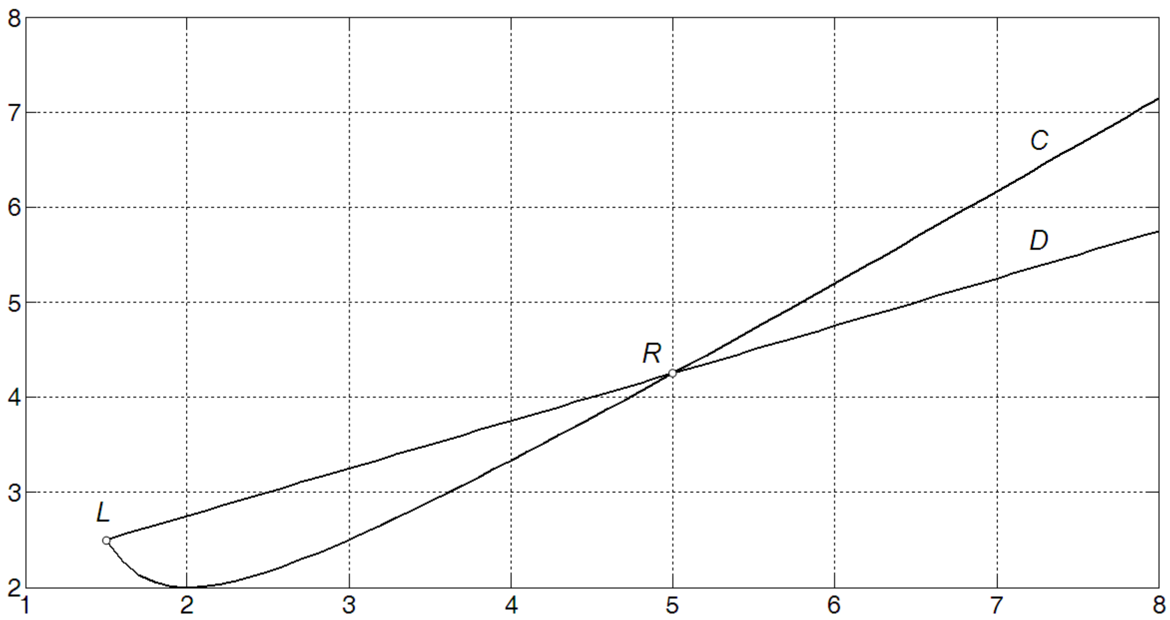

Рисунок 3 – Линия равной степени устойчивости $\eta = 0{,}5$

При положительной оценке можно построить семейство линий равной степени устойчивости, приняв согласно [5] $\eta = 0{,}4; 0{,}3; 0{,}2$ и 0,15. Для этого достаточно отредактировать SCRIPT 6: во-первых, произвести переиндексацию соответственно принятым значениям η, во-вторых, исправить начальное значение диапазона изменения независимых переменных A_{04}, A_{03}, A_{02} и A_{015}. Конечное значение диапазона одинаково для всех значений η и равно 8 согласно [5]. Начальное значение можно определить аналитически как меньший из корней квадратного уравнения

$$\eta A^2 - \left(5\eta^2 + \frac{1}{\eta}\right)A + (6\eta^3 + 3) = 0$$

или графически (см. выше). С помощью курсора графического окна установлены искомые значения 1,2; 0,9; 0,6 и 0,45.

Таким образом, чтобы построить диаграмму Вышнеградского с линиями равной степени устойчивости, необходимо выполнить действия согласно SCRIPT 7.

SCRIPT 7:

```
A1=0.1:0.1:8;
BA=1./A1;
A2=0.3:0.1:3;
CD=(2.*A.^3+27)./(9.*A2);
eta3=1:0.1:3.95;
A3=1./eta3.^2+2.*eta3;
DE= eta3.^2+2./eta3;
eta4=0.37:0.1:1;
A4=1./eta4.^2+2.*eta4;
DF= eta4.^2+2./eta4;
eta05=0.5;
A05=1.5:0.1:5;
B051=A05*eta05-eta05^2+1/eta05;
B052=1./(A05-2*eta05)+2*eta05.*(A05-2*eta05);
eta04=0.4;
A04=1.2:0.1:7.05;
B041=A04*eta04-eta04^2+1/eta04;
B042=1./(A04-2*eta04)+2*eta04.*(A04-2*eta04);
eta03=0.3;
A03=0.9:0.1:8;
B031=A03*eta03-eta03^2+1/eta03;
B032=1./(A03-2*eta03)+2*eta03.*(A03-2*eta03);
eta02=0.2;
A02=0.6:0.1:8;
```

```
B021=A02*eta02-eta02^2+1/eta02;
B022=1./(A02-2*eta02)+2*eta02.*(A02-2*eta02);
eta015=0.15;
A015=0.45:0.1:8;
B0151=A015*eta015-eta015^2+1/eta015;
B0152=1./(A015-2*eta015)+2*eta015.*(A015-2*eta015);
plot(A1,BA , A2,CD ,A3,DE,A4,DF, A05,B051, A05,B052, A04,B041, A04,B042, A03,B031, A03,B032, A02,B021, A02,B022, A015,B0151, A015,B0152); grid on
```

Результат выполнения SCRIPT 7 показан на рисунке 4.

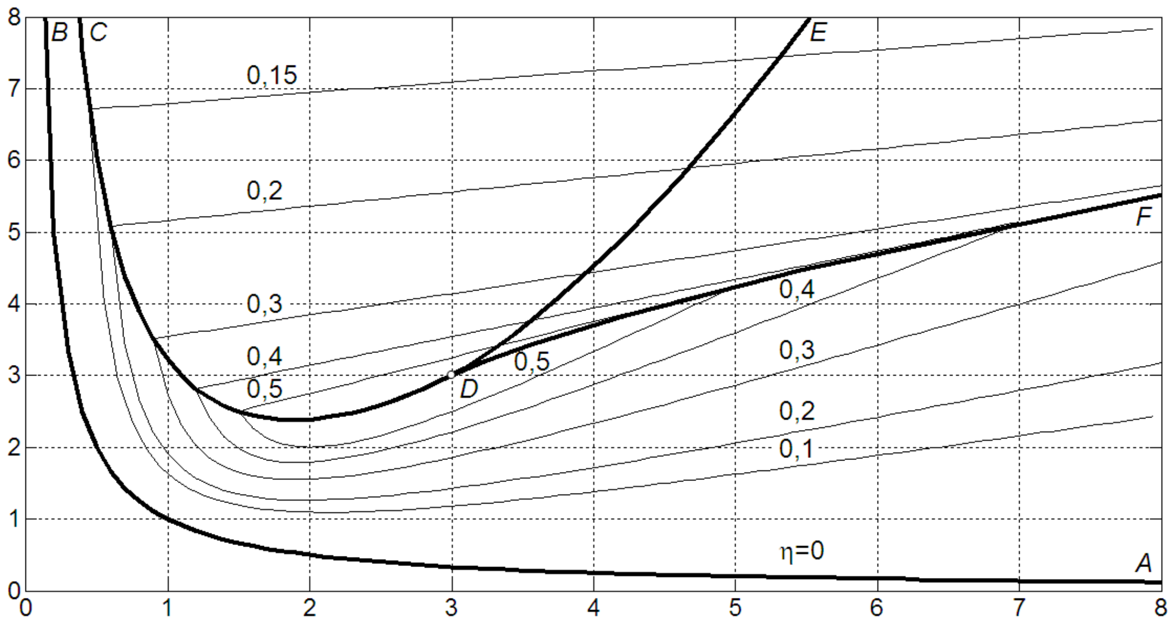

Рисунок 4 – Диаграмма Вышнеградского с линиями равной степени устойчивости

Разработанные для учебного процесса, что предполагает их многократное использование, SCRIPT 4 и SCRIPT 7 целесообразно хранить в М-файлах.

Таким образом, поставленная выше цель достигнута. Рассмотренные задачи могут быть использованы в качестве учебных для углублённого изучения ТАУ и совершенствования вычислительных навыков. Настоящую работу можно применять в качестве кратких методических указаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нестеров А.В., Нестеров С.В. О проблеме современного электронного учебника по теории автоматического управления // Вузовский учебник XXI века: Матер. Всерос. науч.-метод. конф. – Краснодар: КубГТУ, 2002. – С. 65-66.

2. Нестеров А.В., Нестеров С.В. Применение интегрированного пакета Matlab для решения типовых задач теории автоматического управления // Инновационные процессы в высшей школе: Матер. VIII Всероссийской науч.-практ. конф. – Краснодар: КубГТУ, 2002. – С. 109-110.

3. Нестеров А.В., Нестеров С.В. О доступности текстов электронных учебников // Инновационные процессы в высшей школе // Матер. XI Всероссийской науч.-практ. конф. – Краснодар: Изд. КубГТУ, 2005. – С. 84-85

4. Нестеров А.В., Нестеров С.В. Теория автоматического управления. – Краснодар: Изд-во КубГТУ, 2006. – 191 с.

5. Воронов А.А., Титов В.К., Новогранов Б.Н. Основы теории автоматического регулирования и управления. – М.: Высш. шк., 1977. – 519 с.

REFERENCES

1. Nesterov A.V., Nesterov S.V. O probleme sovremennogo elektronnogo uchebnika po teorii avtomaticheskogo upravleniya // Vuzovskiy uchebnik XXI veka: Mater. Vseros. nauch.-metod. konf. – Krasnodar: KubGTU, 2002. – S. 65-66.

2. Nesterov A.V., Nesterov S.V. Primenenie integrirovannogo paketa Matlab dlya resheniya tipovykh zadach teorii avtomaticheskogo upravleniya // Innovatsionnye protsessy v vysshey shkole: Mater. VIII Vserossiyskoy nauch.-prakt. konf. – Krasnodar: KubGTU, 2002. – S. 109-110.

3. Nesterov A.V., Nesterov S.V. O dostupnosti tekstov elektronnykh uchebnikov // Innovatsionnye protsessy v vysshey shkole // Mater. XI Vserossiyskoy nauch.-prakt. konf. – Krasnodar: Izd. KubGTU, 2005. – S. 84-85

4. Nesterov A.V., Nesterov S.V. Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. – Krasnodar: Izd-vo KubGTU, 2006. – 191 s.

5. Voronov A.A., Titov V.K., Novogranov B.N. Osnovy teorii avtomaticheskogo regulirovaniya i upravleniya. – M.: Vyssh. shk., 1977. – 519 s.

VYSHNEGRADSKY'S DIAGRAM IN MATLAB SYSTEM

A.V. NESTEROV, S.V. NESTEROV

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350002;
e-mail: briefkasten129@rambler.ru

Article has didactic character. Two educational tasks which solution is offered to be directed to profound studying of automatic control theory and enhancement of computing skills are formulated. The first task consists in creation of the Vyshnegradsky's diagram. The second task supplements the first and comes down to drawing on the "main" chart of lines of equal degree of stability. The known algorithms of creation of the Vyshnegradsky's diagram and lines of equal degree of stability are realized in MATLAB system. Controls graphical windows of the MATLAB system in turn also serve the solution of objectives. For automatic creation of the Vyshnegradsky's diagram and lines of equal degree of stability it is recommended to keep algorithms in M-files. All development stages are followed by detailed comments which can be used in a laboratory practical work as methodical instructions.
Key words: Vyshnegradsky's diagram, lines of equal degree of stability.