УДК 517.521

КРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЙ ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНЫХ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

В работе рассмотрены важнейшие определения и понятия теории бесконечных числовых рядов, такие как определение бесконечного числового ряда, его суммы, понятие сходимости и расходимости числового ряда. Читатель, возможно с удивлением, обнаружит, что до сих пор нет единого определения числового ряда, так же как единой классификации расходящихся рядов. Используя связь между бесконечными последовательностями и рядами, приведены четыре определения бесконечного числового ряда. Все основные формулировки даны на языке оригинала и переведены на русский язык.

Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, сумма бесконечного ряда, сходящийся ряд, расходящийся ряд.

1. Определение бесконечного числового ряда и его суммы. В теории бесконечных числовых рядов произвольная бесконечная последовательность комплексных или вещественных чисел

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots, \tag{1}$$

обозначаемая для краткости символами $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ или $\{a_n\}$, называется *последовательностью членов бесконечного ряда*. Член a_n последовательности (1) с номером n называется *n-м членом ряда*.

Складывая по порядку члены последовательности (1)

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, \quad S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots,$$

получим бесконечную последовательность

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots, \tag{2}$$

называемую *последовательностью частичных сумм*. Сумму S_n называют *n-й частичной суммой*. Дадим теперь определение бесконечного числового ряда.

Определение 1. *Последовательность частичных сумм* $\{S_n\}$ *называется бесконечным числовым рядом и обозначается символом*

$$a_1 + a_1 + a_1 + ... + a_n + ... \quad (3)$$

в котором все члены последовательности $\{a_n\}$ *соединены знаками сложения в том порядке, в котором они расположены в последовательности* $\{a_n\}$.

Бесконечный числовой ряд (3) называют иначе *упорядоченной формальной суммой* или *просто формальной суммой*, связанной с последовательностью его членов (1). Иногда формальной суммой называют символ, которым обозначается числовой ряд.

Иногда, числовой ряд (3) будем писать в сокращенной форме

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, . \quad (4)$$

Здесь указатель *n* (или индекс или значок) суммирования пробегает все натуральные значения от 1 до ∞. Впрочем, иногда нумерацию удобно начинать не с единицы, а с какого-либо целого числа, например с нуля.

Числовому ряду изначально не приписывается какой-либо суммы, так как его нельзя рассматривать как *математическое выражение*, *задаваемое формулами* (3) *или* (4), *числовое значение которого можно найти*, *выполнив все действия*. Мысль о том, что сумму ряда надо определять, а не находить путём бесконечного сложения чисел окончательно укрепилась среди математиков только в первой половине XIX столетия. Поэтому вопрос

«*Чему равна сумма бесконечного ряда* $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$?»

должен быть заменён вопросом

«*Как определить сумму бесконечного ряда* $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$?».

Один из возможных ответов можно получить, рассматривая бесконечную геометрическую прогрессию

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots. \qquad (5)$$

Её n-ю частичную сумму

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}$$

можно вычислить следующим образом

$$2 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)=\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}+\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Тогда n-я частичная сумма S_n

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} = 2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

отличается по модулю от 2 на величину $\frac{1}{2^{n-1}}$, которая для всех достаточно больших номеров n будет меньше наперёд заданного сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$. Так что за сумму ряда (5) естественно принять число $S = 2$, равное пределу последовательности частичных сумм S_n.

Изложенные выше и им подобные соображения легли в основу классического определения суммы бесконечного ряда (3), данного О. Коши в своём курсе «Алгебраического анализа» [1, p. 123] и первым построившего на его основе теорию бесконечных рядов:

«*Soit*

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + \ldots$$

la somme des n premiers termes, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n *s'approche indéfiniment d'une certaine limite s, la série sera dite convergente, et la limite en question s'appellera la somme de la série. Au contraire, si, tandis que n croit indéfiniment, la somme* s_n *ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera divergente, et n'aura plus de somme*".

В переводе с французского языка (здесь и далее все переводы выполнены автором статьи), сказанное означает

«*Пусть*

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + \ldots$$

будет суммой первых n членов, где n обозначает любое целое число. Если, для любой возрастающей величины n, сумма s_n неограниченно приближается к определённому пределу s, то ряд называется сходящимся, а сам предел называется суммой ряда. Напротив, если, в то время как n считается неограниченным, сумма s_n не приближается никакому определённому пределу, ряд будет расходящимся, и не будет иметь какой-либо суммы".

Повторим сказанное Коши с использование современной терминологии

Определение 2. *Конечный предел* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ *последовательности частичных сумм* $\{S_n\}$ *ряда* (3) *называют суммой ряда и обозначают тем же символом, что и бесконечный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = S .$$

Заметим, что один и тот же символ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ используется как для обозначения бесконечного числового ряда, так и для обозначения его суммы, когда она у него есть, придавая тем самым символу ряда (3) или (4) в случае конечной суммы числовой смысл.

Наряду с указанным понятием суммы, получившим название суммы ряда по Коши, вводится понятие суммы ряда в различных обобщённых смыслах, позволяющих суммировать расходящиеся ряды.

Понятие суммы ряда позволяет разделить ряды на два обширных класса - сходящиеся ряды и расходящиеся ряды.

Определение 3. *Если ряд имеет конечную сумму S, то его называют сходящимся рядом или сходящимся к сумме S, в противном же случае – расходящимся.*

Таким образом, у расходящегося ряда, согласно определению, суммы нет. В свою очередь, расходящиеся ряды так же делятся на два класса.

Определение 4. *Расходящийся ряд называется расходящимся к бесконечности, когда последовательность его частичных сумм стремится к* ∞, $+\infty$ *или* $-\infty$ (*в этом случае говорят, что его сумма в несобственном смысле равна* ∞, $+\infty$ *или* $-\infty$), *в противном случае ряд называется неопределенно расходящимся* (*в этом случае говорят, что суммы вовсе нет*).

Замечание. Сумма ряда в несобственном смысле может равняться $+\infty$ *или* $-\infty$ только, если члены ряды являются вещественными числами, в этом случае говорят что вещественный ряд определённо расходящийся.

Вещественные ряды, у которых $|S_n| \to \infty$ так, что при этом значение S_n не стремится к $+\infty$ или к $-\infty$, иногда относят к неопределённым расходящимся рядам. В этом случае считают, что у ряда (3) вовсе нет суммы (даже бесконечно большой!) [2, 3, 4]. Напротив, другие авторы считают, что в таком случае (несобственная) сумма равна бесконечности $S = \infty$ [5, 6].

Эти различия вызваны тем, что в теории вещественных рядов в конце XIX – начале XX веков было принято разделение рядов не на два, а на три класса: сходящиеся ряды, обладающие конечной суммой; расходящиеся ряды с суммой равной $+\infty$ или $-\infty$ и колеблющиеся или неопределённые ряды, вообще не имеющие суммы (сюда же относятся неограниченно колеблющиеся ряды, для которых $|S_n| \to \infty$) [2].

Изложенная нами классификация расходящихся рядов основана на том, что в комплексном анализе множество комплексных чисел можно расширить добавлением одной единственной бесконечно удалённой точки $z = \infty$, к которой сходятся все бесконечно большие последовательности. Поэтому комплексные ряды на «законных основаниях» могут иметь сумму $S = \infty$. Чтобы сблизить терминологию теории комплексных и вещественных рядов и сократить её изложение, и было предложена изложенная выше классификация расходящихся рядов, объединяющая оба этих случая.

Вопрос о сходимости ряда (3) или (4) по определению равносилен вопросу о сходимости последовательности (2) его частичных сумм. Обратно, если нам дана произвольная числовая последовательность

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots, \tag{6}$$

то, рассматривая её как последовательность частичных сумм (2), можно найти последовательно члены ряда (3) или (4)

$$a_1 = S_1,\ a_2 = S_2 - S_1,\ a_3 = S_3 - S_2, \ldots,\ a_n = S_n - S_{n-1},\ \ldots, \tag{7}$$

и составить из них сам ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1 + \left(S_2 - S_1\right) + \left(S_3 - S_2\right) + \ldots + \left(S_n - S_{n-1}\right) + \ldots. \tag{8}$$

В таком случае, вопрос о сходимости последовательности (6) сводится к вопросу о сходимости ряда (8), причём сумма ряда совпадает с пределом последовательности.

Определение бесконечного ряда как последовательности частичных сумм (2) возникло, по-видимому, в начале 20-х годов XX века. Например, оно приведено в первом немецком издании знаменитой книги «Теория и применение бесконечных рядов» Конрада Кноппа (1882 – 1957) [1, s. 94], правда, не совсем в удачной формулировке:

"*Eine unendliche Reihe ist ein neues Symbol für eine bestimmte aus ihm herzuleitende Zahlenfolge*, *nämlich für die Folge seiner Teilsummen*".

«*Бесконечный ряд есть новый символ для определенной последовательности чисел*, *получаемый из неё, а именно, последовательности его частичных сумм*».

Надо бы наоборот, последовательность частичных сумм (2) назвать рядом, для обозначения которого используются символы (3) или (4). В таком виде это определение мы находим в учебнике Роберта Бартла [7, p. 376] и в учебном пособии С. Шведенко [8, с. 25].

2. Другие определения бесконечного числового ряда. Данное в предыдущем пункте определение бесконечного числового ряда исторически не было первым. В начале XIX века под бесконечным числовым рядом понималась последовательность (1), члены которой менялись по определённому закону. Это определение мы находим у французского математика О. Коши в 6 главе его Cours d'analyse [1, p. 123]:

“*On appelle série une suite indéfinie de quantités*

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \&c.\ .\ .$$

qui dérivent les unes des autres suivant une loi determine. Ces quantités elles-mêmes sont les différens termes de la série que l’on considère”

«*Назовём рядом бесконечную последовательность величин*

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \&c.\ .\ .$$

которые следуют одна за другой согласно определённому закону. Эти величины сами являются различными членами рассматриваемого ряда».

Как мы видим, для Коши последовательность и ряд это одно и то же. Символ ряда он использует только для обозначения его суммы. Определение, которому следовал Коши, повторено затем в первом томе знаменитой «Энциклопедии элементарной математики» Г. Вебера [9, с. 423]. Этой терминологии можно придать, нисколько не улучшая, по сути, современную формулировку.

Определение 5. *Ряд – это однозначное отображение множества натуральных чисел во множество вещественных или комплексных чисел. Другими словами, ряд – это функция дискретного аргумента* (*то есть числовая последовательность*).

Приведём ещё одну, третью по счёту, систему определений из теории рядов, тесно связанную с предыдущим изложением, воспользовавшись для лучшего понимания аналогией с интегралом Римана. Последовательность членов ряда $\{a_n\}$, последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ и сумму ряда $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ будем рассматривать как аналоги, соответственно, подынтегральной функции $f(x)$, интегральной суммы Римана $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\mathrm{c}_i)\Delta x_i$ и интеграла Римана $I = \lim\limits_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\mathrm{c}_i)\Delta x_i$. В таком случае ряд как *математический объект* не определяется. Он попросту не нужен. Вместо него фигурирует *сумма бесконечного ряда* (хотя более правильно было бы сумму бесконечного ряда называть, следуя аналогии с определённым интегралом, *суммой членов последовательности*), которую обозначают символом $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ (или сокращенно $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$). Теперь аналогом символа суммы бесконечного ряда выступает символ или знак интеграла Римана $\int\limits_a^b f(x)dx$. В оправдание этой системы определений можно сказать, что мы не определяем интеграл Римана как множество всех его интегральных сумм или как саму подынтегральную функцию. Почему это нужно делать для бесконечных рядов?

Однако, желая сохранить сам термин «бесконечный ряд» (иногда как дань исторической традиции), несмотря на отсутствие самого определения числового ряда, его начинают использовать в терминологии теории рядов даже тогда, когда это по существу не требуется, внося в терминологию теории рядов большую путаницу. Так, например, если предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ конечен, то вместо фразы «сумма ряда существует» говорят, что «бесконечный ряд сходится», а если конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ нет, то в этом случае говорят, что ряд расходится.

Предложенная третья система понятий и определений, связанных с бесконечными рядами, широко используется со второй половины XIX века [2, p. 15; 10, p. 225]. Следует, тем не менее, сказать, что применяющие их математики сделали всё, чтобы запутать и себя и других, не расставляя «правильно акценты» и не поясняя должным образом применяемую терминологию. Можно прийти от всего этого к отчаянию и назвать это определение ряда «псевдо-определением», то есть “Pseudo-Definition” [11, p. 8], или «определением, вызывающим большие трудности». Последняя характеристика очень точна.

В 50-е и 60-е годы XX века французский математик Ж. Дьедоне, один из основателей знаменитой группы под общим псевдонимом «Николя́ Бурбаки́» (фр. Nicolas Bourbaki), определил бесконечный ряд (3) как пару из последовательности $\{a_n\}$ и последовательности частичных сумм $\{S_n\}$, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ [12, p. 95]. За сумму ряда он, разумеется, принял предел последовательности частичных сумм. С тех пор это определение бесконечного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, четвёртое по счёту, широко распространилось не только среди французских математиков, но и среди математиков всего мира. В Советском Союзе определение ряда как пары двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{S_n\}$ придерживался Л.Д. Кудрявцев [13, с. 5].

В 1998 году в определении Ж. Дьедоне российский математик В.П. Хавин [14, с. 148] заменил пару из двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{S_n\}$ на упорядоченную пару $\langle\{a_n\},\{S_n\}\rangle$. Это определение ряда неудачно уже тем, что пара $\langle\{S_n\},\{a_n\}\rangle$ не является даже рядом, так как для первой последовательности $\{S_n\}$ вторая последовательность $\{a_n\}$ не является последовательностью частичных сумм. Поскольку обе эти последовательности связаны с другом, то, зная одну, мы находим вторую последовательность.

Такую пару последовательностей лучше назвать *связанной*, а не *упорядоченной*. Таким образом, естественно дать следующее определение:

Определение 6. *Бесконечный числовой ряд есть связанная пара двух числовых комплексных или вещественных последовательностей* $(\{a_n\},\{S_n\})$, *состоящая из последовательности* $\{a_n\}$ *и связанной с нею последовательностью частичных сумм* $\{S_n | S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n\}$ *и обозначаемая как* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. Критический анализ некоторых определений бесконечного числового ряда. Все приведённые определения, связанные с бесконечными числовыми рядами, равнозначны друг другу. Каждое из них трактует сумму ряда как предел последовательности частичных сумм, а сам ряд рассматривается или как последовательность частичных сумм, или как последовательность членов ряда, или как пара этих последовательностей, или является всего лишь знаком для обозначения суммы последовательности-ряда.

Тем не менее, находятся математики, которые считают, что это не так. Например, несмотря на возможность рассматривать ряд как последовательность, часть математиков продолжает считать ряды суммами. Например, в известной книге «Продвинутый анализ» американский математик Г. Эдвардс [15, р. 400] прямо пишет:

"*In every day speech the words 'series' and 'sequence' are more or less synonymous, but in mathematical terminology they are very sharply distinguished. A series is a sum and sequence is merely an infinite list* (*of numbers, points, functions, etc.*)"

«*В повседневной речи* «*ряд*» и «*последовательность*» *более или менее синонимы*, *но в математической терминологии они резко различаются*. *Ряд* – *это сумма*, *а последовательность* – *это просто бесконечный список* (*чисел*, *точек*, *функций*, *т.д.*)»

Встречаются определения бесконечного числового ряда как формальной бесконечной суммы (более правильно называть её упорядоченной, так как изменения порядка членов ряда, как мы увидим дальше, может изменить сумму ряда или превратить его в расходящийся ряд). Некоторые авторы [6, с. Ильин, Позняк, 2005] термин *формальная сумма* заменяют равносильным термином *формально образованное из элементов последовательности* (1) *выражение вида* (3). Заметим что, не дав определения формальной суммы, так определять бесконечный ряд бессмысленно.

К сожалению, в русскоязычной математической литературе определение формальной суммы отсутствует. Попытки читателя поискать определение формальной суммы ни к чему не приведут. В Интернете на сайте энциклопедии ВикипедиЯ он ещё сможет найти «таинственные» пояснения того, что элементы некоторой абелевой группы – это и есть формальные суммы. Все станет на место, если предложить следующее определение.

Определение 7. (*Упорядоченная*) *формальная сумма – это числовая последовательность, обозначаемая символом, в котором члены последовательности соединены знаками сложения. Формальная сумма называется иначе бесконечным числовым рядом*.

Впрочем, в качестве «разъяснения» того, что такое бесконечный числовой ряд часто говорится, что это символ, в которой члены последовательности (1) соединены знаками сложения [4, с. 284]. Этот символ иногда (для сходящегося ряда) имеет числовое значение. В таком случае определённый интеграл от функции, предел функции, квадратный корень из вещественного числа это не число, получаемое в результате выполнения тех или иных операций, как всех нас учили, а символ, для которого иногда (далее нужно перечислить условия) можно указать числовое значение.

Конечно, можно задаться вопросом о том, зачем члены последовательности (1) нужно соединять знаками сложения, если никаких действий сложения с ними мы не производим? Конечно, не нужно. Сам Г.М. Фихтенгольц говорит об этом, добавляя, что символу бесконечного ряда всегда будет сопоставляться пара последовательностей (1) и (2). Ему бы поступить наоборот, и паре последовательностей (1) и (2) сопоставить символ ряда и назвать пару бесконечным числовым рядом!

Заключение. Дан анализ основных определений и понятий в теории рядов. Представлено четыре разных определений бесконечного числового ряда. Приведены типичные ошибки, допускаемые при определении числового ряда и его суммы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cauchy A.L. Cours d'analyse de l'École royale polytechnique I.re partie: Analyse algébrique. – Paris: Impr. royale Debure frères, 1821. – 576 p.
2. Bromwich T.J.I. Introduction to the Theory of Infinite Series. – London: Macmillan and Com., 1908. – 511 p.
3. Knopp K. Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. – Berlin: Springer, 1922. – X+474 s.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т2. 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 864 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3 томах, Том 2. – М.: Дрофа, 2004. – 720 с.
6. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч1. 7-е изд. – М.: Физматлит, 2005. – 412 с.
7. Bartle R.G. The Elements of Real Analysis. – N.Y.: Jonh Wiley & Sons, Inc, 1967. – 447 p.
8. Шведенко С.В. Начала анализа функций комплексной переменной. – М.: МИФИ, 2008. – 356 с.
9. Вебер Г., Вельштейн Дж. Энциклопедия элементарной математики. Т1. Элементарная алгебра и анализ. – Одесса, Матезис, 1906. – 623 с.
10. Bertrand J. Traité de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral. Premiére Partie. Calcul Différentiel. – Paris: Gauthier-Villars, 1864. – XLIV+780 p.
11. Bonar D.D., Khoury M. Jr. Real infinite series. – Mathematical Association of America, 2006. – 444 p.

12. Dieudonné J. Treatise On Analysis. Vol. I. Foundations of Modern Analysis. – N.Y., London: AP, 1969. – XVIII+387 p.

13. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3 томах, Том 2. – М.: Дрофа, 2004. – 720 с.

14. Хавин В.П. Основы математического анализа. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. – СПб.: Лань, 1998. – 389 с.

15. Edwards H.M. Advanced Calculus. A Differential Forms Approach. – Boston: Birkhaser, 1994. – 700 p.

REFERENCES

1. Cauchy A.L. Cours d'analyse de l'École royale polytechnique I.re partie: Analyse algébrique. – Paris: Impr. royale Debure frères, 1821. – 576 p.

2. Bromwich T.J.I. Introduction to the Theory of Infinite Series. – London: Macmillan and Com., 1908. – 511 p.

3. Knopp K. Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. – Berlin: Springer, 1922. – X+474 s.

4. Fikhtengolts G.M. Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya. T2. 8-e izd. – M.: FIZMATLIT, 2003. – 864 s.

5. Kudryavtsev L.D. Kurs matematicheskogo analiza. V 3 tomakh, Tom 2. – M.: Drofa, 2004. – 720 s.

6. Ilin V. A., Poznyak E. G. Osnovy matematicheskogo analiza. Ch1. 7-e izd. – M.: Fizmatlit, 2005. – 412 s.

7. Bartle R.G. The Elements of Real Analysis. – N.Y.: Jonh Wiley & Sons, Inc, 1967. – 447 p.

8. Shvedenko S.V. Nachala analiza funktsiy kompleksnoy peremennoy. – M.: MIFI, 2008. – 356 s.

9. Veber G., Velshteyn Dzh. Entsiklopediya elementarnoy matematiki. T1. Elementarnaya algebra i analiz. – Odessa, Matezis, 1906. – 623 c.

10. Bertrand J. Traité de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral. Premiére Partie. Calcul Différentiel. – Paris: Gauthier-Villars, 1864. – XLIV+780 p.

11. Bonar D.D., Khoury M. Jr. Real infinite series. – Mathematical Association of America, 2006. – 444 p.

12. Dieudonné J. Treatise On Analysis. Vol. I. Foundations of Modern Analysis. – N.Y., London: AP, 1969. – XVIII+387 p.

13. Kudryavtsev L.D. Kurs matematicheskogo analiza. V 3 tomakh, Tom 2. – M.: Drofa, 2004. – 720 s.

14. Khavin V.P. Osnovy matematicheskogo analiza. Differentsialnoe i integralnoe ischislenie funktsiy odnoy peremennoy. – SPb.: Lan, 1998. – 389 s.

15. Edwards H.M. Advanced Calculus. A Differential Forms Approach. – Boston: Birkhaser, 1994. – 700 p.

CRITICAL ANALYSIS OF BASIC NOTIONS AND DEFINITIONS OF THE THEORY OF INFINITE SERIES

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

The paper deals with the most important definitions and notions of the theory of infinite series such as the definition of an infinite series, its sum and the notion of convergence and divergence of an infinite series. The reader can be surprised to find that there is still no single definition of an infinite series, as well as the classification of divergent series. Using the relationship between an infinite sequence and an infinite series four definitions of the infinite series are given. All the main formulations are given in the original language and translated into Russian.

Key words: infinite series, sum of an infinite series, convergent series, divergent series.