УДК 517.521

ТЕОРИЯ ТЕЛЕСКОПИЧЕСКИХ РЯДОВ

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Введено общее понятие телескопического ряда, охватывающее общеизвестные представления о нём. Проблема суммирование телескопического ряда связывается с проблемой точного суммирования. В данной работе точное суммирование означает нахождение суммы ряда в виде точного действительного или комплексного значения в так называемой «замкнутой форме». Под замкнутой формой понимается представление частичной суммы ряда в виде некоторой известной элементарной функции $S_n = f(n) = m_n$, для которой предел можно вычислить. Изложена общая теория телескопических рядов, основанная на трёх теоремах. Приведены и исследованы некоторые частные случаи. Даны примеры точного суммирования телескопических рядов.

Ключевые слова: телескопический ряд, замкнутая форма, точное суммирование.

1. Суммирование телескопических рядов. Из множества рядов наиболее просто находится сумма телескопического ряда.

Понятие телескопического ряда 1. *Телескопический ряд - это ряд, в частичных суммах которого, после линейного преобразования старых членов ряда в новые, остаётся несколько членов ряда.*

Название дано по аналогии с телескопической зрительной трубой. По большому счёту, любой числовой ряд является телескопическим. Чтобы в этом убедится, достаточно обратиться к формуле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1 + \left(S_2 - S_1\right) + \left(S_3 - S_2\right) + \ldots + \left(S_n - S_{n-1}\right) + \ldots .$$

Недостаток такого представления очевиден – числовые значения частичных сумм S_n выражаются через конечные суммы членов ряда. Поэтому выполнить предельный переход

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

не всегда представляется возможным. Другое дело, если выражение для суммы S_n удаётся представить в виде некоторой известной элементарной функции

$S_n = f(n) = m_n$, для которой предел можно вычислить. Тогда говорят, что частичная сумма S_n представлена в «замкнутой форме».

Например, если *n*-й член ряда a_n можно представить в виде разности

$$a_n = m_n - m_{n+q},$$

где q – натуральное число, а $\{m_n\}$ - числовая последовательность, предел которой известен, то частичные суммы S_n телескопического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (m_n - m_{n+q}), \tag{1}$$

как мы увидим ниже в теоремах 1 и 2, можно представить в «замкнутой форме» и тем самым вычислить сумму ряда. Простейшим случаем такого телескопического ряда (1) является ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (m_n - m_{n+1}). \tag{2}$$

Для пояснения, приведём известный пример телескопического ряда Менголе, просуммированного им в 1650 году [1, p. 173]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = 1. \tag{3}$$

Воспользуемся очевидным тождеством

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = m_n - m_{n+1}, \quad m_n = \frac{1}{n}.$$

В таком случае, мы имеем дело с рядом вида (2) с частичной суммой

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Переходя к пределу, находим сумму ряда (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

Приведём простую теорему о сходимости телескопических рядов (2).

Теорема 1. *Пусть* $\{m_n\}$ - *комплексная или вещественная последовательность. Тогда*:

а) *если последовательность* $\{m_n\}$ *сходится к пределу* M, *то телескопический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(m_n - m_{n+1})$ *сходится к сумме* $S = m_1 - M$.

б) *если последовательность* $\{m_n\}$ *расходится, то телескопический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(m_{n+1} - m_n)$ *расходится.*

в) *если последовательность* $\{m_n\}$ *расходится к бесконечности в комплексном случае или к бесконечности без знака или к бесконечности со знаком в вещественном случае, то телескопический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(m_{n+1} - m_n)$ *расходится, соответственно, к бесконечности в комплексном случае, бесконечности без знака или бесконечности того же знака, что и последовательность* $\{m_n\}$ *в вещественном случае.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай а). Найдём S_n:

$$S_n = (m_1 - m_2) + (m_2 - m_3) + (m_3 - m_4) + \ldots + (m_n - m_{n+1}) = m_1 - m_{n+1}, \quad (5)$$

Так как $m_n \to M$, $n \to \infty$, то $S_n \to m_1 - M$, $n \to \infty$. Таким образом, сумма телескопического ряда в случае а) равна $\sum_{n=1}^{\infty}(m_n - m_{n+1}) = m_1 - M$.

Рассмотрим случай б). Найдём сумму S_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(m_{n+1} - m_n)$:

$$S_n = (m_2 - m_1) + (m_3 - m_2) + (m_4 - m_3) + \ldots + (m_{n+1} - m_n) = m_{n+1} - m_1, \quad (6)$$

Так как теперь последовательность $\{m_n\}$ расходится, то расходится сам телескопический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(m_{n+1} - m_n)$.

Рассмотрим теперь случай в). В силу того, что $m_n \to \infty,\ n \to \infty$ или $m_n \to \pm\infty,\ n \to \infty$, находим, что $S_n \to \infty,\ n \to \infty$ или $S_n \to \pm\infty,\ n \to \infty$. Теорема доказана.

Следующая теорема является обобщением теоремы 1 [2, с. 262].

Теорема 2. *Пусть* $\{m_n\}$ - *вещественная или комплексная последовательность. Тогда*:

а) *если последовательность* $\{m_n\}$ *сходится к пределу M, то телескопический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(m_n - m_{n+q}\right)$ *сходится к сумме*

$$S = m_1 + m_2 + ... + m_q - Mq .$$

б) *если вещественная последовательность* $\{m_n\}$ *расходится к бесконечности со знаком, то телескопический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(m_{n+q} - m_n\right)$ *расходится к бесконечности того же знака.*

Доказательство. Рассмотрим случай а). Из доказательства теоремы 1 (см. формулу (5)) , имеем

$$\sum_{n=1}^{k}\left(m_n - m_{n+1}\right) = m_1 - m_{k+1}, \dots ,\ \sum_{n=1}^{k}\left(m_{n+q-1} - m_{n+q}\right) = m_q - m_{k+q} .$$

Складывая эти q равенств, получаем k-ю частичную сумму рассматриваемого ряда

$$S_k = \sum_{n=1}^{k}\left(m_n - m_{n+q}\right) = m_1 + m_2 + ... + m_q - (m_{k+1} + m_{k+2} + ... + m_{k+q}) . \qquad (7)$$

Пусть последовательность $\{m_n\}$ сходится и $\lim_{k\to\infty} m_k = M$. Тогда $\lim_{k\to\infty} m_{k+p} = M$ для значений $p = 1, 2, 3, ..., q$. Поэтому, переходя к пределу в равенстве (7), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(m_n - m_{n+q}\right) = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(m_n - m_{n+q}\right) = m_1 + m_2 + \ldots + m_q - qM .$$

Случай а) доказан.

Рассмотрим теперь случай б). Вновь воспользуемся доказательством теоремы 1 (см. формулу (6)), из которой имеем

$$\sum_{n=1}^{k}\left(m_{n+1} - m_n\right) = m_{k+1} - m_1,\ \ldots,\ \sum_{n=1}^{k}\left(m_{n+q} - m_{n+q-1}\right) = m_{k+q} - m_q .$$

Складывая эти q равенств, получаем k-ю частичную сумму рассматриваемого ряда

$$S_k = \sum_{n=1}^{k}\left(m_n - m_{n+q}\right) = m_{k+1} + \ldots + m_{k+q} - (m_1 + \ldots + m_q). \tag{8}$$

Покажем теперь, что если $m_k \to +\infty,\ k \to \infty$, то $S_k \to +\infty,\ k \to \infty$. Для этого зададим произвольное сколь угодно большое положительное вещественное число $P > 0$. Тогда найдётся такой номер K, что для всех $k > K$ будут выполнены неравенства

$$m_{k+1} > P,\ m_{k+2} > P, \ldots,\ m_{k+q} > P .$$

Отсюда, следует, что

$$S_k > qP - (m_1 + \ldots + m_q) = P_1.$$

Если P сколь угодно велико, то $P_1 = qP - (m_1 + \ldots + m_q)$ будет сколь угодно велико. Это означает, что $S_k \to +\infty,\ k \to \infty$.

Аналогично доказывается, что если $m_k \to -\infty,\ k \to \infty$, то $S_k \to -\infty,\ k \to \infty$. Теорема доказана.

Замечание. В случае б) возникает естественный вопрос, всегда ли будет расходиться телескопический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(m_{n+q} - m_n\right)$ к бесконечности без знака, если к бесконечности без знака сходится последовательность $\{m_n\}$? Другими словами, верно ли, что при выполнении условия $m_n \to \infty,\ n \to \infty$ всегда верно, что $\sum_{n=1}^{\infty}\left(m_{n+q} - m_n\right) = \infty$?

Мы приведём пример, дающий отрицательный ответ на этот вопрос. Пусть $m_n = (-1)^n n$. Тогда $m_n \to \infty,\ n \to \infty$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(m_{n+2} - m_n\right)$. Его k-я частичная сумма согласно формуле (8) равна

$$S_k = m_{k+1} + m_{k+2} - m_1 - m_2 = (-1)^{k+1}(k+1) + (-1)^{k+2}(k+2) + 1 - 2 = (-1)^k - 1.$$

Отсюда следует, что $S_{2k} = 0$ и $S_{2k-1} = -2$. Следовательно, последовательность частичных сумм $\left\{S_n\right\}$ предела не имеет, поэтому суммы у ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(m_{n+2} - m_n\right)$ нет.

Мы можем привести пример ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(m_{n+2} - m_n\right)$, который, тем не менее, оказывается в этом случае сходящимся. Пусть на этот раз $m_n = (-1)^{n+1}\ln(n+1)$. Тогда k-я частичная сумма равна, как это следует из формулы (8)

$$S_k = (-1)^{k+2}\ln(k+2) + (-1)^{k+3}\ln(k+3) - \ln 1 + \ln 3 = (-1)^k \ln\frac{k+2}{k+3} + \ln 3.$$

Так как $\lim_{k\to\infty}\ln\frac{k+2}{k+3} = 0$, то ряд сходится к сумме $\sum_{n=1}^{\infty}\left(m_{n+2} - m_n\right) = \ln 3$.

Наконец, мы можем привести пример ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(m_{n+2} - m_n\right)$, который расходится к бесконечности без знака, если $m_n \to \infty,\ n \to \infty$. Пусть теперь $m_n = (-1)^n n^2$. Тогда k-я частичная сумма равна, как это следует из формулы (8)

$$S_k = m_{k+1} + m_{k+2} - m_1 - m_2 = (-1)^k(2k+3) - 3.$$

В таком случае $\sum_{n=1}^{\infty}\left(m_{n+2} - m_n\right) = \infty$.

Теорема 2 допускает дальнейшее обобщение. Заметим, что если n-й член a_n телескопического ряда (2) представлен в виде разности (1), то его можно записать через сумму, называемую линейным преобразованием старых членов ряда a_n через новые члены ряда m_k

$$a_n = m_n - m_{n+q} = 1 \cdot m_n + 0 \cdot m_{n+1} + 0 \cdot m_{n+2} + ... + 0 \cdot m_{n+q-1} + (-1) \cdot m_{n+q}, \; n = 1, 2, 3, ...$$

или

$$a_n = c_0 \cdot m_n + c_1 \cdot m_{n+1} + c_2 \cdot m_{n+2} + ... + c_{q-1} \cdot m_{n+q-1} + c_q \cdot m_{n+q}, \; n = 1, 2, 3, ... \quad (8)$$

где

$$c_0 + c_1 + c_2 + ... + c_{q-1} + c_q = 0. \quad (9)$$

В этом случае получаем следующее обобщение **теоремы 2** для телескопических рядов [2, с. 264].

Теорема 3. *Пусть для вещественного или комплексного ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \quad (10)$$

найдётся вещественная или комплексная последовательность $\{m_n\}$ *и вещественные или комплексные числа* $c_0, c_1, c_2, ..., c_q$, *удовлетворяющие линейному преобразованию* (8) *и условию* (9). *Тогда*:

а) *если последовательность* $\{m_n\}$ *сходится к пределу* M, *то телескопический ряд* (10) *сходится к сумме*

$$S = c_0 \cdot m_1 + (c_0 + c_1)m_2 + ... + (c_0 + c_1 + ... + c_{q-1})m_q + (c_1 + 2c_2 + ... + qc_q)M. \quad (11)$$

б) *если последовательность*

$$\{(c_1 + c_2 + ... + c_{q-1} + c_q)m_{N+1} + ... + (c_{q-1} + c_q)m_{N+q-1} + c_q \cdot m_{N+q}\} \quad (12)$$

расходится, то телескопический ряд (10) *расходится.*

в) *если последовательность* (12) *расходится к бесконечности в комплексном случае или к бесконечности без знака или со знаком в* *вещественном случае, то телескопический ряд* (10) *расходится, соответственно, к бесконечности в комплексном случае или к бесконечности без знака или к бесконечности того же знака что и последовательность* (12) в вещественном случае.

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму ряда (10) с индексом $N > q$ и заменим в ней члены ряда (10) по формуле (8)

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} (c_0 \cdot m_n + c_1 \cdot m_{n+1} + c_2 \cdot m_{n+2} + \ldots + c_{q-1} \cdot m_{n+q-1} + c_q \cdot m_{n+q}) =$$

Тогда, группируя слагаемые содержащие множители m с одинаковыми индексами, получим

$$S_N = c_0 \cdot m_1 + (c_0 + c_1)m_2 + \ldots + (c_0 + c_1 + \ldots + c_{q-1})m_q + (c_0 + c_1 + \ldots + c_q)m_{q+1} +$$

$$+(c_0 + c_1 + \ldots + c_q)m_{q+2} + \ldots + (c_0 + c_1 + \ldots + c_q)m_{N-1} + (c_0 + c_1 + \ldots + c_q)m_N +$$

$$+(c_1 + c_2 + \ldots + c_q)m_{N+1} + \ldots + (c_{q-2} + c_{q-1} + c_q)m_{N+q-2} + (c_{q-1} + c_q)m_{N+q-1} + c_q \cdot m_{N+q}.$$

В силу формулы (9) суммы при $m_{q+1}, m_{q+2}, \ldots, m_N$ равны нулю, хотя для конкретного ряда сумму S_N иногда проще найти путём прямых вычислений. Отсюда

$$S_N = c_0 \cdot m_1 + (c_0 + c_1)m_2 + (c_0 + c_1 + c_2)m_3 + \ldots + (c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{q-1})m_q +$$

$$+(c_1 + c_2 + \ldots + c_{q-1} + c_q)m_{N+1} + \ldots + (c_{q-1} + c_q)m_{N+q-1} + c_q \cdot m_{N+q}. \quad (13)$$

Рассмотрим сначала случай а). Так как последовательность $\{m_n\}$ сходится к конечному пределу *M*, то $m_{N+k} \to M,\ N \to \infty$ для любого фиксированного *k*. Переходя к пределу $\lim\limits_{N \to \infty} S_N$ в формуле (13), приходим к формуле (11).

В случае б) из формулы (13) следует, что если последовательность (12) расходится, то последовательность (13) частичных сумм и, следовательно, сам ряд (А) расходятся.

Рассмотрим теперь случай в). Если последовательность (12) расходится к бесконечности без знака или к бесконечности со знаком, то, как следует из формулы (13), последовательность частичных сумм ряда (10) так же будет расходиться к бесконечности без знака или со знаком. Теорема доказана.

Замечание. Если вещественная последовательность $\{m_n\}$ расходится к бесконечности определённого знака, то из формулы (12) ещё не следует, что сумма телескопического ряда (10) будет бесконечно большой (сравни с замечанием к теореме 2). Для этого необходимо выполнение некоторых условий. Например, чтобы суммы $c_1 + c_2 + ... + c_{q-1} + c_q$, $c_2 + ... + c_{q-1} + c_q$, $c_{q-1} + c_q$, c_q были одного знака.

2. Примеры вычисления сумм телескопических рядов. Приведём примеры телескопических рядов.

1) Сходящийся телескопический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^4 + n^2 + 1} = 1. \tag{14}$$

Так как $\frac{2n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{2n}{(n^2+1)^2 - n^2} = \frac{1}{n(n-1)+1} - \frac{1}{(n+1)n+1}$, то ряд (14) - телескопический. Поскольку $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n-1)+1} = 0$, то из теоремы 1 следует формула (14).

2) Бесконечная комплексная или вещественная фибоначчи – геометрическая прогрессия [3]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n q^{n-1} = f_1 + f_2 q + f_3 q^2 + ... + f_n q^{n-1} + ..., \tag{15}$$

где множители $f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \ge 3$, образуют последовательность Фибоначчи. Воспользуемся очевидным тождеством $q^k = \frac{q^k - q^{k+1} - q^{k+2}}{1 - q - q^2}$, $1 - q - q^2 \ne 0$, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ и вычислим S_n

$$S_n = f_1\frac{1-q-q^2}{1-q-q^2} + f_2\frac{q-q^2-q^3}{1-q-q^2} + f_3\frac{q^2-q^3-q^4}{1-q-q^2} + f_4\frac{q^3-q^4-q^5}{1-q-q^2} + \ldots. +$$

$$+f_{n-2}\frac{q^{n-3}-q^{n-2}-q^{n-1}}{1-q-q^2} + f_{n-1}\frac{q^{n-2}-q^{n-1}-q^{n}}{1-q-q^2} + f_n\frac{q^{n-1}-q^{n}-q^{n+1}}{1-q-q^2} =$$

$$= \frac{f_1 + (f_2 - f_1)q + (f_3 - f_2 - f_1)q^2 + \ldots + (f_n - f_{n-1} - f_{n-2})q^{n-1} - (f_{n-1} + f_n)q^n - f_n q^{n+1}}{1-q-q^2} =$$

$$= \frac{1}{1-q-q^2}\left(f_1 - 0\cdot q - 0\cdot q^2 + \ldots + 0\cdot q^{n-1} - f_{n+1}q^n - f_n q^{n+1}\right) = \frac{1 - f_{n+1}q^n - f_n q^{n+1}}{1-q-q^2}.$$

Из асимптотики $f_n \sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}},\ n \to \infty,\ \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n q^n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\varphi q)^n}{\sqrt{5}} = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n q^{n+1} = q\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\varphi q)^n}{\sqrt{5}} = 0$, если $|\varphi q| < 1$ или $|q| < \frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Поэтому прогрессия (15) сходится при условии, что $|q| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ к сумме $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q-q^2}$.

3) Сходящийся ряд

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{2}{n^2} = \frac{3}{4}\pi. \qquad (16)$$

Воспользуемся формулой для арктангенса разности двух аргументов и преобразуем n-й член ряда

$$\operatorname{arctg}\frac{2}{n^2} = \operatorname{arctg}\frac{2}{1+n^2-1} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n-1}\frac{1}{n+1}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{n-1} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1},\ n \ge 2.$$

Теперь вычислим сумму телескопического ряда (16)

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{2}{k^2} = \operatorname{arctg}2 + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{k-1} - \operatorname{arctg}\frac{1}{k+1}\right) =$$

$$=\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi\ .$$

4) Сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}=2\,. \tag{17}$$

Имеем $\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}$. Так как $c_0=1,\ c_1=1,\ c_2=-2$, то условие (10) **теоремы 3** выполнено $c_0+c_1+c_2=0$. Кроме того, $m_n=\frac{1}{n}\to 0,\ n\to\infty$. Следовательно, по **теореме 3** предыдущего пункта ряд (17) сходится. Из формулы (11) этой теоремы находим его сумму

$$S=c_0m_1+(c_0+c_1)m_2=1\cdot 1+(1+1)\cdot\frac{1}{2}=2\,.$$

5) Сходящийся ряд

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sin\frac{\pi}{n}-2(n+1)\sin\frac{\pi}{n+1}+(n+2)\sin\frac{\pi}{n+2}\right)=-2\,. \tag{18}$$

Эту сумму можно найти согласно **теореме 3** предыдущего пункта. Действительно, так как $c_0=1,\ c_1=-2,\ c_2=1$, то условие (10) $c_0+c_1+c_2=0$ этой теоремы выполнено. К тому же, $m_n=n\sin\frac{\pi}{n}\to\pi,\ n\to\infty$. Тогда по **теореме 3** предыдущего пункта ряд (18) сходится. Из формулы (11) этой теоремы находим его сумму $S=c_0m_1+(c_0+c_1)m_2+(\mathrm{c}_1+2c_2)\cdot\pi=-2$.

6) Сходящийся ряд [4, с. 189]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)}, \tag{19}$$

где $\{a_n\},\ a_n>0$ - произвольная вещественная последовательность. Ряд (19) телескопический. Действительно

$$\frac{a_1}{1+a_1}=1-\frac{1}{1+a_1},\ \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}=\frac{1}{1+a_1}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)},\ \dots,$$

$$\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)}=\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_{n-1})}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)}.$$

Согласно теореме 1 ряд (19) сходится, если будет сходиться положительная последовательность $\{1/((1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n))\}$. Последняя последовательность монотонно убывает с ростом n и ограничена снизу константой $m=0$, поэтому она всегда будет сходиться к некоторому числу

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)}=M\geq 0. \qquad (20)$$

Тогда ряд (19) будет сходится к сумме $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)}=1-M$.

Отметим, что расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=+\infty$ достаточна для того, чтобы константа $M=0$. Действительно, согласно неравенству Бернулли

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)\geq\sum_{k=1}^{n}a_k \ \text{ или } \ 0<\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)}<\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}a_k}.$$

Переходя в этом двойном неравенстве к пределу, получим

$$0\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}a_k}=0.$$

Откуда следует, с учётом формулы (20), что $M=0$.

Несложно показать, что для расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=+\infty$ необходимо выполнение равенства $M=0$. Действительно, пусть $M=0$. Тогда из (20) следует в силу монотонного возрастания функции $y=\ln x$, что

$$\lim_{m\to\infty}\ln\big((1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)\big)=+\infty. \qquad (22)$$

Воспользуемся известным неравенством $\ln(1+x) < x,\ x > 0$, тогда получим двойное неравенство

$$0 < \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_n} < \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \ln(1+a_k)} = \frac{1}{\ln(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)}.$$

Учитывая (22), перейдём в последнем двойного неравенства к пределу. Тогда получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_n} = 0$ или $\sum_{k=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

Замечание. Замена $a_k = \frac{1}{b_k} > 0$ сводит ряд (19) к телескопическому ряду

$$\frac{1}{1+b_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_1 b_2 ... b_{n-1}}{(1+b_1)(1+b_2)...(1+b_n)}, \qquad (23)$$

Его *k*-я частичная сумма равна

$$S_k = 1 - 1 - \frac{b_1 b_2 ... b_k}{(1+b_1)(1+b_2)...(1+b_k)}. \qquad (24)$$

Так же, как и для ряда (19), устанавливается сходимость ряда (24) к сумме

$$\frac{1}{1+b_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_1 b_2 ... b_{n-1}}{(1+b_1)(1+b_2)...(1+b_n)} = 1 - M, \text{ где } M = \lim_{k\to\infty} \frac{b_1 b_2 ... b_k}{(1+b_1)(1+b_2)...(1+b_k)}$$

для любых $b_i > 0$ и доказывается, что $M = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k} = +\infty$.

7) Сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0 a_1 ... a_{n-1}}{(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n)} = \frac{a_0}{x+a_1} + \frac{a_0 a_1}{(x+a_1)(x+a_2)} + ... = \frac{a_0}{x}, \qquad (25)$$

где $\{a_n\}$ - последовательность с положительными членами такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$ расходится, x – любое положительное вещественно число.

Ряд, стоящий в левой части тождества (35), является телескопическим, поскольку

$$\frac{a_0a_1...a_{n-1}}{(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_{n-1})(x+a_n)}=\frac{a_0a_1...a_{n-1}((x+a_n)-a_n)}{x(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_{n-1})(x+a_n)}=$$

$$=\frac{a_0a_1...a_{n-1}}{x(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_{n-1})}-\frac{a_0a_1...a_{n-1}a_n}{x(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_{n-1})(x+a_n)}=m_{n-1}-m_n\,,$$

где

$$m_n=\frac{a_0a_1...a_{n-1}a_n}{x(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_{n-1})(x+a_n)}\;. \qquad (26)$$

В таком случае, согласно формуле (5) из **теоремы 1 п. 1** его n-я частичная сумма равна

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_0a_1...a_{k-1}}{(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_k)}=\frac{a_0}{x+a_0}-\frac{a_0a_1...a_{n-1}a_n}{x(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_{n-1})(x+a_n)}. \qquad (27)$$

Из (26) следует, что

$$m_n=\frac{1}{(x/a_0)(x/a_1+1)(x/a_2+1)...(x/a_{n-1}+1)(x/a_n+1)}>0\,.$$

Так как последовательность $\{m_n\}$ положительна, монотонно убывает и ограничена снизу нулём, то она сходится к некоторой константе $M\ge 0$

$$M=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+x/a_1)(1+x/a_2)...(1+x/a_n)}\,.$$

Поэтому, согласно теореме 1 из **пункта 1**, ряд (25) сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_0a_1...a_{n-1}}{(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n)}=\frac{a_0}{x+a_1}+\frac{a_0a_1}{(x+a_1)(x+a_2)}+...=\frac{a_0}{x}-M\;.$$

Отметим, что, как и в предыдущем примере для расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}1/a_k=+\infty$ необходимо и достаточно, чтобы константа $M=0$.

Замечание. Замена $x=1,\ a_0=1,\ a_k=b_k,\ k\geq 1$ сводит ряд (25) к ряду (23). Замена $x=1,\ a_0=1,\ a_k \to \frac{1}{a_k},\ k\geq 1$ сводит ряд (25) к ряду (19).

Заключение. Изложена общая теория телескопических рядов, основанная на трёх теоремах, из которых две последние слабо отражены в математической литературе. Приведены и исследованы некоторые частные случаи. Даны примеры точного суммирования телескопических рядов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cajori F. A History of Mathematics. 2-nd ed. – L.: Macmillan & Co., Ltd, 1919. – 514 p.
2. Воробьёв Н.Н. Теория рядов. 4-е изд. – М.: Наука, Гл. ред. физ.- мат. лит., 1979. – 408 с.
3. Воробьёв Н.Н. Числа Фибоначи. 4-е изд., допол. – М.: Наука, Гл. ред. физ.- мат. лит., 1978. – 144 с.
4. Чезаро Э. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. – Ч1. Одесса: Матезис, 1913. – 632 с.

REFERENCES

1. Cajori F. A History of Mathematics. 2-nd ed. – L.: Macmillan & Co., Ltd, 1919. – 514 p.
2. Vorobev N.N. Teoriya ryadov. 4-e izd. – M.: Nauka, Gl. red. fiz.- mat. lit., 1979. – 408 s.
3. Vorobev N.N. Chisla Fibonachi. 4-e izd., dopol. – M.: Nauka, Gl. red. fiz.- mat. lit., 1978. – 144 s.
4. Chezaro E. Elementarnyy uchebnik algebraicheskogo analiza i ischisleniya beskonechno malykh. – Ch1. Odessa: Matezis, 1913. – 632 s.

THEORY OF INFINITE TRIPLE SERIES

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

The general concept of a telescopic series is introduced covering the well-known notions about it. The problem of the summation of the telescoping series associated with the problem of the exact summation. In this paper, an exact summation means finding the sum of the series in the form of an exact real or complex values in the so-called "closed form". Under the closed form is understood as representation of a partial sum of the series in the form of a well-known elementary functions $S_n = f(n) = m_n$, for which the limit can be calculated. The general theory of telescopic series based on the three theorems is presented. Some special cases are presented and studied. Examples of the exact summation of telescopic series are given.

Key words: telescoping series, closed form, the exact summation.