

*О ПРИМЕНЕНИИ ОБЩИХ ТЕОРЕМ ДИНАМИКИ***А.И. СМЕЛЯГИН**

*Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2,
электронная почта: asmelyagin@yandex.ru*

Для упрощения исследования материальных тел и механических систем были выведены общие теоремы динамики. Общие теоремы динамики позволяют, упростить как процедуру составления уравнений движения исследуемых объектов, так и процесс их решения. Практика решения задач динамики показала, что каждая из теорем имеет свою рациональную область применения. Однако в настоящее время четко не определены области и границы возможного применения каждой теоремы. В предлагаемой работе на примере исследования движения катящегося без скольжения по гладкой поверхности колеса показано, что не все общие теоремы динамики можно эффективно использовать для исследования сложных движений твердых тел. Показано, что только теорема об изменении кинетической энергии является универсальной теоремой, которая может применяться для исследования всех видов механического движения.

Ключевые слова: динамика, теорема, тело, механическая система, энергия, работа, сила, момент, закон движения.

Основные законы о движении материальных объектов впервые были сформулированы великим английским ученым И. Ньютоном [1]. Заметим, что современные трактовки законов Ньютона многообразны, хотя по смыслу и содержанию совершенно идентичны [2-4].

Анализ оригинальных и современных формулировок аксиом или законов движения И. Ньютона в [2-4] показал, что они описывают движение только абстрактных материальных объектов - материальных точек. Следовательно, законы Ньютона корректно можно использовать только для исследования не существующих в природе объектов, а именно материальных точек.

В [5-15] сформулированы основные аксиомы, принципы и следствия и выведены теоремы, принципы и уравнения механики для реальных объектов природы, а также показана эффективность их применения для исследования материальных тел и механических систем.

Рассмотрим практическое применение приведенных в [9] аксиом и следствий из них при исследовании движений вращающегося колеса.

Исследуем, например, движение без скольжения колеса по гладкой ровной поверхности (рис.1).

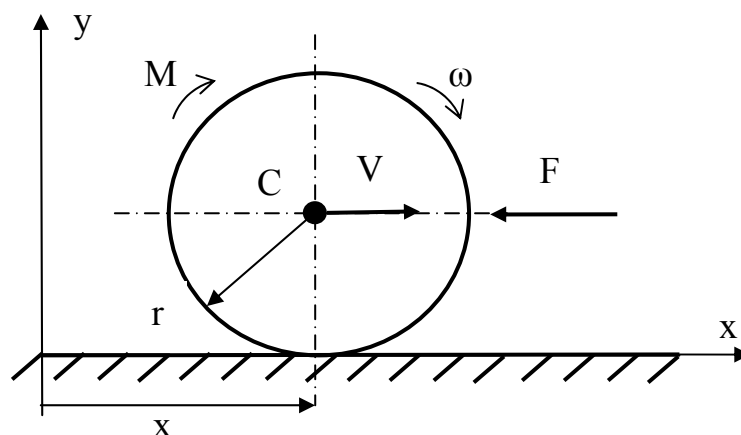


Рисунок 1 – Расчетная схема

При исследовании движения колеса примем, что в первом случае колесо представляет собой кольцо, а в другом - однородный диск. Считаем, что колесо имеет радиус r и массу m , которая сосредоточена в точке C пересечения осей симметрии колеса. Пусть на колесо действуют постоянные по величине движущий момент M и сила сопротивления движению F . Движение колеса исследуем при следующих начальных условиях, что в момент времени $t=0$ начальная угловая скорость ω и угол его поворота φ , соответственно, равны нулю то есть $\omega_0=0$ и $\varphi_0=0$.

Исследование движения колеса проведем с помощью выведенных и сформулированных в [4-11] теорем, принципов и уравнений механики.

Теорема об изменении кинетической энергии

В [4] показано, что энергия является основным, первичным понятием определяющим движение и взаимодействие материальных объектов.

В [6] доказана теорема об изменении кинетической энергии материального тела, которая утверждает, что изменение кинетической энергии тела при его перемещении равно работе сил и моментов сил, действующих на него на этом перемещении.

То есть

$$T - T_0 = \sum A_i \quad (1)$$

где: $A_i = A_F + A_M$ – работа сил и моментов сил, действующих на колесо, на исследуемом перемещении; T и T_0 – кинетическая энергия исследуемого колеса в конечном и начальном положении, соответственно.

При принятых начальных условиях $t = 0$, $\omega_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$ кинетическая энергия колеса в начальном положении равна нулю

$$T_0 = 0 . \quad (2)$$

Тогда с учетом (2) уравнение (1) примет вид

$$T = \sum A_i , \quad (3)$$

Найдем кинетическую энергию катящегося колеса. Так как колесо совершает плоское движение, то его энергия определится

$$T = T_{II} + T_B \quad (4)$$

где T_{II} и T_B – кинетические энергии колеса при его поступательном и вращательном движениях, соответственно.

Кинетическая энергия поступательного и вращательного движения колеса, соответственно, определяются

$$T_{II} = \frac{mV^2}{2} \quad (5)$$

$$T_B = \frac{I\omega^2}{2} \quad (6)$$

Установим связь между линейной и угловой скоростью колеса

$$V = \omega r \quad (7)$$

С целью наглядности и для удобства дальнейшего анализа динамики исследуемого колеса уравнения движения для разного конструктивного исполнения колес (кольцо – однородный диск) будем записывать в виде двух параллельных столбцов с одной (посередине) нумерацией формул. Левая колонка формул будет относиться к колесу-кольцу, а правая к колесу-диску.

Моменты инерции колес определяются

$$I = mr^2 \qquad (8) \qquad I = \frac{1}{2}mr^2$$

Подставив (5), (6), (7) и (8) в (4) и после ряда преобразований, найдем кинетические энергии колес

$$T_2 = mr^2\omega^2 \qquad (9) \qquad T_2 = \frac{3}{4}mr^2\omega^2$$

Работа, которую совершает колесо при своём движении, определится

$$\sum A_i = M\varphi - Fx \qquad (10)$$

Свяжем, линейное и угловое перемещения колеса

$$x = \varphi r \qquad (11)$$

С учетом (11), работа (10) примет вид

$$\sum A_i = (M - Fr)\varphi \qquad (12)$$

С учетом (9) и (12) уравнение (3) для разных по исполнению колёс, соответственно, определится

$$mr^2\omega^2 = (M - Fr)\varphi \qquad (13) \qquad \frac{3}{4}mr^2\omega^2 = (M - Fr)\varphi$$

Введем обозначение

$$B = \frac{M - Fr}{mr^2} \qquad (14)$$

Из (13), с учетом (14), найдем угловую скорость колес

$$\omega = \sqrt{B\varphi} \qquad (15) \qquad \omega = 0,866\sqrt{B\varphi}$$

Из (15) следует, что при одних и тех же начальных условиях колесо-кольцо вращается быстрее, чем колесо-диск.

Представим (15) в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{B\varphi} \qquad (16) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = 0.866\sqrt{B\varphi}$$

Разделив в (16) переменные, после интегрирования с учетом начальных условий, что при $t = 0, x_0 = 0, V_0 = 0$ найдем угол поворота колес

$$\varphi = \frac{1}{2} B t^2 \quad (17) \quad \varphi = \frac{1}{3} B t^2$$

С учетом (14), углы поворота колес определяются

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{(M - Fr)}{mr^2} t^2 \quad (18) \quad \varphi = \frac{1}{3} \frac{(M - Fr)}{mr^2} t^2$$

Подставив (18) в (15), после преобразований, найдем угловые скорости колес

$$\omega = 0,707 \frac{(M - Fr)}{mr^2} t \quad (19) \quad \omega = 0,557 \frac{(M - Fr)}{mr^2} t$$

Подставив (19) в (7) найдем скорости и перемещения центра масс колес

$$V = 0,707 \frac{(M - Fr)}{mr} t \quad (20) \quad V = 0,557 \frac{(M - Fr)}{mr} t$$

$$x = 0,3535 \frac{(M - Fr)}{mr} t^2 \quad (21) \quad x = 0,2785 \frac{(M - Fr)}{mr} t^2$$

Из (20) следует, что колесо-кольцо катится в 1,27 раз быстрее, чем колесо-диск.

Теорема о движении центра масс

Для исследования движения механических объектов и систем в [6] были выведены теоремы о движении центра масс тел и систем тел.

Эти теоремы утверждают, что центр масс тел движется как материальная точка, то есть

$$M_c \frac{dV_c}{dt} = \sum F_i \quad (22)$$

где: $M_c = m$ - масса исследуемого объекта; V_c скорость центра масс; F_i - i -я сила, действующая на исследуемый объект.

Применим (22) для исследования катящегося без скольжения колеса (рис. 1).

Для того чтобы воспользоваться (22), найдем силы, действующие на колесо. В соответствии с начальными условиями на колесо действуют приводной момент M и сила сопротивления F .

Найдем силу F_M , действующую со стороны момента на колесо, и приведем её к центру масс

$$F_M = \frac{M}{r} \quad (23)$$

С учетом (23), силы, действующие на колесо, определяются

$$\sum F_i = F_M - F \quad (24)$$

Подставив (24) в (22), получим уравнение движения центра масс колеса

$$m \frac{dV_C}{dt} = F_M - F \quad (25)$$

После ряда преобразований (25) с учетом (23), получим

$$dV_C = \frac{M - Fr}{mr} dt \quad (26)$$

Проинтегрировав (26) с учетом начальных условий, что при $t = 0$ $x_0 = 0$, $V_0 = 0$, найдем скорость центра масс колеса

$$V_C = \frac{M - Fr}{mr} t \quad (27)$$

Из (27) следует, что скорость катящегося колеса, найденная с помощью теоремы о движении центра масс, не зависит от конструктивного исполнения колеса.

Представим (27) в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{M - Fr}{mr} t \quad (28)$$

Разделив переменные в (28) и проинтегрировав полученное выражение с учетом начальных условий, найдем перемещение центра масс колеса

$$x = \frac{1}{2} \frac{M - Fr}{mr} t^2 \quad (29)$$

Сравнивая, соответственно, найденные с помощью теоремы об изменении кинетической энергии линейные скорости колеса (20) и (27), так же перемещения (21) и (29), видно, что они отличаются друг от друга только коэффициентами. Это объясняется тем, что теорема о движении центра масс не

учитывает вращение колеса. Поэтому применять теорему о движении центра масс к телам и механическим системам, у которых в их составе есть тела, совершающие сложные движения нельзя.

Теорема об изменении соэнергии (количества движения)

Для исследования движения механических объектов и систем в [6] были выведены теоремы об изменении соэнергии тел и механических систем тел.

Эти теоремы утверждают, что изменение соэнергии тел и механических систем тел равно, в зависимости от вида их движения, импульсу сил или моментов сил действовавших на объекты, то есть

$$K_{П2} - K_{П1} = \sum S_{Fi} \quad (30)$$

$$K_{B2} - K_{B1} = \sum S_{Mi} \quad (31)$$

где $K_{П2}, K_{П1}$ - соэнергия исследуемого объекта, совершающего поступательное движение в конечной и начальной точке, соответственно; K_{B2}, K_{B1} - энергия исследуемого объекта совершающего вращательное движение в конечной и начальной точке, соответственно; S_{Fi} - импульс i -й силы, действующей на исследуемый объект; S_{Mi} - импульс i -го момента силы, действующей на исследуемый объект.

Используем (30) и (31) для исследования, катящегося без скольжения, колеса (рис. 1).

Так как при $t=0, x_0=0, V_0=0$ то соэнергии колеса в начальный момент равны нулю, то есть

$$K_{П1} = 0 \quad (32)$$

$$K_{B1} = 0 \quad (33)$$

В соответствии с [6] соэнергии колеса в исследуемом положении определяются

$$K_{П2} = mV \quad (34)$$

$$K_{B2} = I\omega \quad (35)$$

Для того, чтобы воспользоваться (30) и (31), найдем импульсы сил и моментов, действующих на колесо. В соответствии с начальными условиями на

колесо действуют приводной момент M и сила сопротивления F , тогда импульсы их сил и моментов определяются, соответственно

$$\sum S_{F_i} = Ft \quad (36)$$

$$\sum S_{M_i} = Mt \quad (37)$$

С учетом (32-37), уравнения (30) и (31) примут вид, соответственно.

$$mV = Ft \quad (38)$$

$$I\omega = Mt \quad (39)$$

Из (38) выразим время t

$$t = \frac{mV}{F} \quad (40)$$

Подставим (40) в (39) и, учитывая (7), найдем

$$1 = M \frac{mr}{FI} \quad (41)$$

Подставив в (41), моменты инерции для колеса-кольца и колеса-диска, после преобразований получим, соответственно

$$1 = \frac{M}{Fr} \quad (42)$$

$$1 = \frac{2M}{Fr} \quad (43)$$

Видно, что формулы (42) и (43) ни какого отношения к законам движения колеса не имеют, а, следовательно, теоремы об изменении соэнергии тел не могут использоваться для исследования движения тел и систем тел, совершающих сложные движения. Следовательно, эти теоремы можно применять только для исследования простейших движений тел и механических систем.

Модифицированное уравнение Лагранжа Прода

Для частного случая движения механической системы, когда $m=const$, $I=const$ и при скоростях тел, не зависящих от обобщенных координат, в [6] были получены уравнения, которые имеют следующий вид

$$m_{np_i} u_i = Q_i \quad (44)$$

где: m_{npi} - приведенная мера инерции (масса, момент инерции) i -го тела; Q_i – i -тая обобщенная сила; u_i - соответствующее движению ускорение; $u_i = a$ и $u_i = \varepsilon$ при поступательном и вращательном движении, соответственно.

Так как для рассматриваемого колеса $m = const$ и $I = const$ (см. (9)), то, воспользуемся модифицированным уравнением Лагранжа II рода (44) для исследования движения колеса (рис.1).

Найдем угловую скорость и закон вращения колеса.

Так как колесо совершает вращательное движение, то, в соответствии с (44), его движение будет описываться уравнением

$$I\varepsilon = Q, \tag{45}$$

где: I - момент инерции колеса; $\varepsilon = \frac{d\omega_1}{dt}$ - угловое ускорение колеса;

$Q = \frac{\delta A}{\delta \varphi}$ - обобщенная сила; $\delta \varphi$ – виртуальное перемещение колеса; δA - работа сил и моментов, действующих на колесо, на виртуальном перемещении.

Представим (45) в виде

$$I \frac{d\omega}{dt} = Q. \tag{46}$$

Для определения обобщенной силы, сообщим колесу виртуальное перемещение (на рис.1 виртуальное перемещение не показано).

Работа колеса на виртуальном перемещении в соответствии с (12) определится

$$\delta A = (M - Fr)\delta \varphi \tag{47}$$

Из (47) следует, что обобщенная сила Q будет

$$Q = M - Fr \tag{48}$$

Подставив (48) в (46), получим дифференциальное уравнение вращения колеса

$$I \frac{d\omega}{dt} = M - Fr \tag{49}$$

Разделив переменные и проинтегрировав (49) с учетом начальных условий, найдем, соответственно, угловую скорость и закон движения колеса

$$\omega = \frac{M - Fr}{I} t, \quad (50)$$

$$\varphi_1 = \frac{M - Fr}{2I} t^2, \quad (51)$$

Сравнивая между собой, при соответствующих значениях моментов инерции (8) угловые скорости и законы движения колеса, найденные с помощью теоремы об изменении кинетической энергии (18), (19) и с помощью модифицированного уравнения Лагранжа II рода (50), (51), видно, что они полностью совпадают между собой. Это свидетельствует о правильности найденных решений.

Следовательно, полученные в [6] теорема об изменении кинетической энергии и модифицированное уравнение Лагранжа II рода являются корректным и поэтому они могут быть рекомендованы для исследования тел и механических систем, у которых звенья (материальные тела) совершают сложные движения.

Выводы

- Только теорема об изменении кинетической энергии является универсальной теоремой, которая может применяться для исследования всех видов механического движения.
- Теоремы об изменении энергии и о движении центра масс можно применять только к телам и механическим системам с простейшими однотипными движениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ньютон Исаак. Математические начала натуральной философии.- М.: Наука, 1989. – 688с.
2. Смелягин А.И. Объекты, для которых сформулированы аксиомы или законы классической механики. // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). Научный журнал. №1. – Краснодар: издательский Дом – Юг, 2014. с.21-25

3. Смелягин А.И. Аксиомы или законы движения сформулировал И. Ньютон. // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). Научный журнал. №2. – Краснодар: издательский Дом – Юг, 2014. с.11-16

4. Смелягин А.И. Основные, первичные понятия механики. // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). Научный журнал. №2. – Краснодар: издательский Дом – Юг, 2014. с.17-26

5. Смелягин А.И. Аксиомы движения материальных тел. // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). Научный журнал. №3. – Краснодар: издательский Дом – Юг, 2014. с.19-34.

6. Смелягин А.И. Теоремы, принципы и уравнения механики. // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). Научный журнал. №4. – Краснодар: издательский Дом – Юг, 2014. с.21-29

7. Смелягин А.И. Применение новых аксиом и следствий из них для исследования движений материальных тел. // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). Научный журнал. №1. – Краснодар: издательский Дом – Юг, 2015. с.19-27

8. Смелягин А.И. Современные аксиомы движения материальных тел и следствия из них. / В сборнике: XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. Составители: Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров; Ответственные редакторы: Д.А. Губайдуллин, А.И. Елизаров, Е.К. Липачев. 2015. с. 3500-3502.

9. Смелягин А.И. Современные аксиомы и следствия из них для исследования динамики машин. / В сборнике: Инновации в машиностроении (ИНМАШ-2015) сборник трудов VII Международной научно-практической конференции. Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, Новосибирский государственный технический университет, Бийский технологический институт, МИП Техмаш; под редакцией Блюменштейна В.Ю. Баканова А.А. Останина О.А.. 2015. с. 526-529.

10. Смелягин А.И. Применение новых аксиом и следствий для исследования движений механических систем. // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). 2015. № 2. с. 19-26.

11. Смелягин А.И. Применение новых аксиом и следствий для исследования механических систем вращательного движения. // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). 2015. № 3. с. 19-27.

12. Смелягин А.И. Применение новых аксиом и следствий для исследования движения колесницы. // Научные труды Кубанского государственного технологического университета. 2015. № 10. с. 47-62.

13. Смелягин А.И. Теория механизмов и машин. Курсовое проектирование. –М.:ИНФРА-М, 2003. -263с.

14. Смелягин А.И. Применение аналогов скоростей и ускорений для исследования механических систем с помощью новых аксиом и теорем // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). 2016. № 2. с. 21-29.

15. Смелягин А.И. Применение аналогов скоростей для исследования механических систем вращательного движения. // Научные труды Кубанского государственного технологического университета. 2016. № 10. с. 125-139.

REFERENCES

1. Nyuton Isaak. Matematicheskie nachala naturalnoy filosofii.- M.: Nauka, 1989. – 688s.

2. Smelyagin A.I. Obekty, dlya kotorykh sformulirovany aksiomy ili zakony klassicheskoy mekhaniki. // Nauka. Tekhnika. Tekhnologii (politekhnicheskiy vestnik). Nauchnyy zhurnal. №1. – Krasnodar: izdatelskiy Dom – Yug, 2014. s.21-25

3. Smelyagin A.I. Aksiomy ili zakony dvizheniya sformuliroval I. Nyuton. // Nauka. Tekhnika. Tekhnologii (politekhnicheskiy vestnik). Nauchnyy zhurnal. №2. – Krasnodar: izdatelskiy Dom – Yug, 2014. s.11-16

4. Smelyagin A.I. Osnovnye, pervichnye ponyatiya mekhaniki. // Nauka. Tekhnika. Tekhnologii (politekhnicheskiy vestnik). Nauchnyy zhurnal. №2. – Krasnodar: izdatelskiy Dom – Yug, 2014. s.17-26

5. Smelyagin A.I. Aksiomy dvizheniya materialnykh tel. // Nauka. Tekhnika. Tekhnologii (politekhnicheskiy vestnik). Nauchnyy zhurnal. №3. – Krasnodar: izdatelskiy Dom – Yug, 2014. s.19-34.

6. Smelyagin A.I. Teoremy, printsipy i uravneniya mekhaniki. // Nauka. Tekhnika. Tekhnologii (politekhnicheskiy vestnik). Nauchnyy zhurnal. №4. – Krasnodar: izdatelskiy Dom – Yug, 2014. s.21-29

7. Smelyagin A.I. Primenenie novykh aksiom i sledstviy iz nikh dlya issledovaniya dvizheniy materialnykh tel. // Nauka. Tekhnika. Tekhnologii (politekhnicheskiy vestnik). Nauchnyy zhurnal. №1. – Krasnodar: izdatelskiy Dom – Yug, 2015. s.19-27

8. Smelyagin A.I. Sovremennye aksiomy dvizheniya materialnykh tel i sledstviya iz nikh. / V sbornike: XI Vserossiyskiy sezd po fundamentalnym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki. Sbornik dokladov. Sostaviteli: D.Yu. Akhmetov, A.N. Gerasimov, Sh.M. Khaydarov; Otvetstvennye redaktory: D.A. Gubaydullin, A.I. Elizarov, E.K. Lipachev. 2015. s. 3500-3502.

9. Smelyagin A.I. Sovremennye aksiomy i sledstviya iz nikh dlya issledovaniya dinamiki mashin. / V sbornike: Innovatsii v mashinostroenii (INMASH-2015) sbornik trudov VII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. Kuzbasskiy gosudarstvennyy tekhnicheskiy universitet imeni T.F. Gorbacheva, Altayskiy gosudarstvennyy tekhnicheskiy universitet im. I.I. Polzunova, Novosibirskiy gosudarstvennyy tekhnicheskiy universitet, Biyskiy tekhnologicheskii institut, MIP Tekhmash; pod redaktsiey Blyumenshteyna V.Yu. Bakanova A.A. Ostanina O.A.. 2015. s. 526-529.

10. Smelyagin A.I. Primenenie novykh aksiom i sledstviy dlya issledovaniya dvizheniy mekhanicheskikh sistem. // Nauka. Tekhnika. Tekhnologii (politekhnicheskiy vestnik). 2015. № 2. s. 19-26.

11. Smelyagin A.I. Primenenie novykh aksiom i sledstviy dlya issledovaniya mekhanicheskikh sistem vrashchatelnogo dvizheniya. // Nauka. Tekhnika. Tekhnologii (politekhnicheskiy vestnik). 2015. № 3. s. 19-27.

12. Smelyagin A.I. Primenenie novykh aksiom i sledstviy dlya issledovaniya dvizheniya kolesnitsy. // Nauchnye trudy Kubanskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta. 2015. № 10. s. 47-62.

13. Smelyagin A.I. Teoriya mekhanizmov i mashin. Kursovoe proektirovanie. –M.:INFRA-M, 2003. -263s.

14. Smelyagin A.I. Primenenie analogov skorostey i uskoreniy dlya issledovaniya mekhanicheskikh sistem s pomoshchyu novykh aksiom i teorem // Nauka. Tekhnika. Tekhnologii (politekhnicheskiiy vestnik). 2016. № 2. s. 21-29.

15. Smelyagin A.I. Primenenie analogov skorostey dlya issledovaniya mekhanicheskikh sistem vrashchatelnogo dvizheniya. // Nauchnye trudy Kubanskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta. 2016. № 10. s. 125-139.

ON THE APPLICATION OF THE GENERAL THEORY OF THE DYNAMICS

A.I. SMELYAGIN

*Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072,
e-mail: asmelyagin@yandex.ru*

General theorems of dynamics were removed to simplify the study of bodies and mechanical systems. General theorems in speakers, how to simplify the procedure for drawing up the equations of motion of the objects, and the process of solving them. Practice solving problems in dynamics showed that each theory has its rational sphere of application. Currently, however, are not clearly defined border area and the possible use of each of the theorem. In this paper we study the example of a rolling motion demon slip on the smooth surface of the wheel shows that not all the general theorems of dynamics can be effectively used for the study of complex motions of solids. It is shown that only the theorem of change of kinetic energy is a universal theorem, which can be used to study all types of mechanical motion.

Key words: dynamics, Theorem, body mechanical system, energy, work, force, moment, the law of motion.