УДК 517.521

О ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ ПРИЗНАКАХ СГУЩЕНИЯ БОРЕЛЯ И БРОМВИЧА И ОБ ИХ СВЯЗИ С ПРИЗНАКАМИ СГУЩЕНИЯ ФАБРИ И КНОППА

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электоронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Рассмотрены два редких показательных признака сгущения Бореля и Бромвича сходимости бесконечного положительного ряда с монотонно убывающими членами. В первые доказана их равносильность и дано доказательство этих признаков сходимости. Дана формулировка признака сходимости, объединяющего оба эти признака в показательный признак сгущения Бореля – Бромвича. Доказательство перечисленных выше признаков основано на признаке сгущения Фабри в форме отношения нулевого порядка. Второй вариант доказательства использует признак сгущения Кноппа. Представленная теория позволяет надеяться на доказательство тем же образом общего показательного признака сгущения, который применяется для определения сходимости положительного ряда с монотонно убывающими членами.

Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, положительный ряд, ряд с убывающими членами, признак сгущения, Ж. Бертран, Е. Борель, Т. Бромвич, К. Кнопп, О. Коши, Ю. Фабри.

1. Признаки сгущения Коши и Бертрана. Важную роль в теории бесконечных числовых рядов играют ряды с положительными и невозрастающими членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \ge 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1}$$

$$u_1 \ge u_2 \ge u_3 \ge \ldots \ge u_n \ge \ldots. \tag{2}$$

Эти ряды часто встречаются в различных приложениях.

Великий французский математик О. Коши предложил в 1821 году первый в истории признак сходимости таких рядов, названный признаком сгущения [1, pp. 135 - 136]:

Признак сгущения Коши. *Положительный ряд* (1), *удовлетворяющий условию* (2), *сходится или расходится вместе с рядом*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k u_{2^k} \ . \tag{3}$$

Например, для обобщённого гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, $s>0$ рядом (3) для него будет геометрическая прогрессия $\sum_{k=0}^{\infty}2^k\frac{1}{\left(2^k\right)^s}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(2^{s-1}\right)^k}$. Последняя сходится для значений $s>1$ и расходится для значений $0<s\le 1$. Следовательно, по признаку сгущения Коши то же справедливо для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, $s>0$.

В 1864 году известный французский математик Ж. Бертран привёл очевидное обобщение признака сгущения Коши [2, pp. 234 - 235], заменив ряд (3) на общий ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}a^k u_{a^k},\ a=2,3,4,\dots . \tag{4}$$

Этот признак сам Бертран назвал признаком Коши, хотя у Коши такой расширенной трактовки никогда не было. Мы будем называть его признаком сгущения Коши – Бертрана или показательным признаком сгущения Бертрана [3]. Приведём его формулировку:

Признак сгущения Коши - Бертрана. *Положительный ряд* (1), *подчиняющий условию* (2), *сходится или расходится вместе с рядом* (4).

Доказательство. Доказательство Бертрана (как и Коши для частного случая $a=2$) основывалось, во-первых на том, что члены ряда (1) не возрастают и, во-вторых, на том, что для любого натурального числа $a\ge 2$ подпоследовательность номеров членов ряда $n_k=a^k$, $k=0,1,2,\dots$ является монотонно возрастающей и неограниченной сверху

$$a^0<a^1<a^2<\dots<a^k<\dots<\infty .$$

Мы будем следовать доказательству Бертрана, немного изменив его и сделав более ясным. Обозначим через S_n n-ю частичную сумму ряда (1) и через T_k k-ю частичную сумму ряда (4). Учтём так же, что $a-1\ge 1$.

Пусть положительный ряд (1) сходится к своей сумме *S*, тогда $S_n \le S$ для любого номера *n*. Покажем теперь, что в таком случае все частичные суммы ряда (4) будут ограничены сверху одним и тем же числом:

$$T_k = u_1 + au_a + a^2 u_{a^2} + \ldots + a^k u_{a^k} = u_1 + au_a + a\left(au_{a^2} + a^2 u_{a^3} + \ldots + a^{k-1} u_{a^k} \right) \le$$

$$\le u_1 + au_a + a\left(\left(a^2 - a \right) u_{a^2} + \left(a^3 - a^2 \right) u_{a^3} + \ldots + \left(a^k - a^{k-1} \right) u_{a^k} \right) \le$$

$$\le u_1 + au_a + a\left(u_{a+1} + u_{a+2} + \ldots + u_{a^2} \right) + \ldots + a\left(u_{a^{k-1}+1} + u_{a^{k-1}+2} + \ldots + u_{a^k} \right) =$$

$$= u_1 + a\left(u_a + u_{a+1} + \ldots + u_{a^k} \right) = u_1 + a\left(S_{a^k} - S_{a-1} \right) \le u_1 + a\left(S - S_{a-1} \right).$$

Отсюда следует, что ряд (4) сходится.

Пусть теперь положительный ряд (4) сходится к своей сумме *T*, тогда $T_k \le T$ для любого номера *k*. Покажем теперь, что в таком случае все частичные суммы ряда (1) будут ограничены сверху одним и тем же числом:

$$S_{a^{k+1}-1} = S_{a-1} + \left(u_a + u_{a+1} + u_{a^2-1} \right) + \left(u_{a^2} + u_{a^2+1} + \ldots + u_{a^3-1} \right) + \ldots +$$

$$+ \left(u_{a^k} + u_{a^k+1} + \ldots + u_{a^{k+1}-1} \right) \le S_{a-1} + (a-1)au_a + (a-1)a^2 u_{a^2} + \ldots + (a-1)a^k u_{a^k} =$$

$$= S_{a-1} + (a-1)\left(au_a + a^2 u_{a^2} + \ldots + a^k u_{a^k} \right) \le S_{a-1} + (a-1)\left(T - u_1 \right).$$

Для произвольного натурального числа *n* всегда можно найти такое натуральное число *k*, что $n \le a^{k+1} - 1$, тогда

$$S_n \le S_{a^{k+1}-1} \le S_{a-1} + (a-1)\left(T - u_1 \right).$$

Отсюда следует, что ряд (1) сходится. Признак доказан.

Например, для ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{n} \log_2^s n}$, $s > 0$ рядом (4) будет обобщённый гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \left(\log_2 2^k \right)^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(2^{s-1} \right)^k}$. Последний сходится для значений $s>1$ и расходится для значений $0<s\le 1$. Следовательно, по признаку сгущения Коши – Бертрана то же справедливо для ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}\log_2^s n},\ s>0$.

2. Показательные признаки сгущения Бореля и Бромвича. Знаменитый французский математик Э. Борель [4] в 1902 году заметил, что признак сгущения Коши (так Борель называл признак Коши – Бертрана) можно расширить следующим образом:

Положительный ряд (1), *удовлетворяющий условию* (2), *сходится или расходится одновременно с рядом*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k u_{\mathrm{E}\left(a^k\right)}, \tag{5}$$

где $a>1$ - *произвольное вещественное число*, $\mathrm{E}(a^k)$ (или $\left[a^k\right]$) - *целая часть вещественного числа* a^k.

К сожалению, Борель не потрудился дать доказательство своему признаку сгущения, заявив следующее [4, p. 4] (здесь и далее переводы даны автором статьи):

«*Можно было бы предположить*, *что а не является целым числом* (*оставаясь однако по-прежнему* > 1); *тогда*, *обозначив через* E(*x*) *наибольшее целое число меньше x*, *имели бы*

$$v_n = a^n u_{\mathrm{E}(a^n)},$$

что можно было бы записать ещё, *для простоты*, *как*

$$v_n = a^n u_{a^n}».$$

В 1908 году известный английский математик Т. Бромвич [5], не ссылаясь на Бертрана и Бореля, привёл свой вариант расширения признака сгущения Коши [5, p. 24]:

«*Метод*, *данный в Упр*. 2, *можно выразить следующим правилом* (*часто называемым признаком сгущения Коши*):

Ряд $\sum a_n$ *сходится или расходится вместе с рядом* $\sum N a_N$, *если* $N = 2^n$ и $a_n \geq a_{n+1}$; *и легко расширить доказательство, данное выше так, чтобы показать, что можно взять N как целую часть* k^n, *где k любое число большее, чем* 1».

Бромвич, как и Борель не привёл доказательство своего варианта признака сгущения, отделавшись стандартной фразой “… *it is easy to extend the proof …”* («... легко расширить доказательство …»). Более того, он даже не сравнивал свой вариант признака с признаком Бореля.

Если воспользоваться современным обозначением целой части $\left[a^k\right]$ вместо $\mathrm{E}(a^k)$ или N вещественного числа a^k, то ряд Бромвича $\sum N a_N$ можно записать в виде

$$\sum_{\left[a^k\right]} \left[a^k\right] u_{\left[a^k\right]}, \tag{6}$$

где суммирование ведётся по всем различным значениям целой части $\left[a^k\right]$ (дробную часть вещественного числа x тогда обозначают, как $\{x\}$ и определяют как разность $\{x\} = x - [x]$, так что $0 \leq x < 1$).

Если $a \geq 2$, то используя очевидное неравенство $[x+y] \geq [x] + [y]$, получим

$$\left[a^{k+1}\right] = \left[a^k + a^k(a-1)\right] \geq \left[a^k\right] + \left[a^k(a-1)\right] \geq \left[a^k\right] + 1,\ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

В таком случае подпоследовательность

$$\left\{\left[a^k\right]\right\}_{k=0}^{\infty} \tag{7}$$

строго монотонно возрастает и ряд Бромвича (6) можно записать как

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[a^k\right] u_{\left[a^k\right]},\ a \geq 2. \tag{8}$$

Если $a^2 \ge a+1$ и $1 < a < 2$, то $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \le a < 2$. В таком случае $a^{k+1} - a^k = \left(a^k - a^{k-1}\right)a \ge 1,\ k = 1, 2, 3, ...$ или $\left[a^{k+1}\right] \ge \left[a^k\right] + 1,\ k = 1, 2, 3, ...$. Тогда подпоследовательность (7) строго монотонно возрастает для всех $k \ge 1$. Так как $n_0 = \left[a^0\right] = 1$ и $n_1 = \left[a^1\right] = 1$, то ряд Бромвича (6) можно записать в виде

$$u_1 + \sum_{k=2}^{\infty}\left[a^k\right]u_{\left[a^k\right]},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \le a < 2. \tag{9}$$

Если $1 < a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, то a^k монотонно и неограниченно возрастает. В таком случае всегда найдётся натуральное число k_0 такое, что $a^k(a-1) \ge 1$ сразу для всех номеров $k \ge k_0$. Тогда $a^{k+1} - a^k = a^k\left(a-1\right) \ge 1,\ k \ge k_0$ или $\left[a^{k+1}\right] \ge \left[a^k\right] + 1,\ k \ge k_0$. Следовательно, подпоследовательность (7) строго монотонно возрастает для всех номеров $k \ge k_0$ и ряд Бромвича (6) можно записать в виде

$$\sum_{1 \le \left[a^k\right] < \left[a^{k_0}\right]}\left[a^k\right]u_{\left[a^k\right]} + \sum_{k=k_0}^{\infty}\left[a^k\right]u_{\left[a^k\right]},\ 1 < a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{10}$$

Сравнивая ряд Бореля (5) с рядом Бромвича во всех трёх случаях (8), (9) и (10), мы приходим к выводу, что в тех же самых случаях остаток ряда Бореля

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a^k u_{\left[a^k\right]} \tag{11}$$

«близок» к остатку ряду Бромвича

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\left[a^k\right]u_{\left[a^k\right]} \tag{12}$$

Поэтому, не удивительно, что справедлива лемма, которую действительно «легко» доказать:

Лемма. *Ряд Бореля* (5) *и ряд Бромвича* (6) *вместе сходятся или вместе расходятся*.

Доказательство. Оба ряда положительны и $a>1$. По определению целой части вещественного числа имеем цепочку неравенств

$$1 \le \left[a^k\right] \le a^k < \left[a^k\right] + 1 \le 2\left[a^k\right]. \tag{13}$$

из которой, согласно признаку сравнения в форме неравенства, следует одновременная сходимость или расходимость остатков рядов (11) и (12).

Из доказанной леммы следует, что признаки Бореля и Бромвича «равносильны» и их можно объединить в один признак:

Показательный признак сгущения Бореля – Бромвича. *Положительный ряд* (1), *удовлетворяющий условию* (2), *сходится или расходится вместе с рядами* (5) *и* (6), если $a>1$.

Доказательство этого признака, так и не данное ни Борелем, ни Бромвичем, отложим до пункта 3.

3. Признак сгущения Фабри в форме отношения нулевого порядка. Французский математик Е. Фабри в 1910 году в своей книге «Теория бесконечных рядов с постоянными членами с приложениями к численному анализу» [6, p. 44] связал сходимость или расходимость положительного ряда (1) с невозрастающими членами, удовлетворяющих условию (2), со сходимостью или расходимостью положительного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} n_k u_{n_k}, \tag{14}$$

где $\{n_k\}, \quad n_{k+1} > n_k, \quad k = 0, 1, 2, ...$ - монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел, неограниченная сверху, предложив признак сходимости, который мы назвали признаком сгущения Фабри в форме отношения нулевого порядка [7]:

Признак сгущения Фабри в форме отношения нулевого порядка (Слабый признак сгущения Фабри). *Пусть члены положительного ряда* (1) *не возрастают, удовлетворяя условию* (2). *Предположим, что* $\{n_k\}$,

$k = 0, 1, 2, ...$ *монотонно возрастающая и неограниченная сверху бесконечная последовательность натуральных чисел, которая начиная с некоторого натурального числа* $1 \le k_0$ *становится строго монотонно возрастающей*

$$1 \le n_0 \le n_1 \le n_2 \le ... \le n_{k_0} < n_{k_1} < ... < +\infty . \qquad (15)$$

Тогда, если для подпоследовательности $\{n_k\}$ *выполняется условие Фабри*

$$1 < A \le \frac{n_{k+1}}{n_k} \le B, \quad k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, ..., \qquad (16)$$

где A и B вещественные числа, то оба положительных ряда (1) *и* (14) *вместе сходятся или вместе расходятся.*

Замечание 1. На самом деле Фабри рассмотрел смесь двух признаков, один из которых мы назвали сильным признаком, а другой – слабым признаком [7]. Формулировка слабого признака сгущения приведена выше.

Замечание 2. Признак Фабри в форме отношения нулевого порядка является более общим признаком сходимости, чем признак Коши – Бертрана. Действительно, для ряда (4) имеем $\frac{n_{k+1}}{n_k} = m, \quad k = 0, 1, 2, 3...$, где m – натуральное число не меньшее 2, так что условие Фабри (16) выполнено.

Для доказательства своего признака сгущения Фабри использовал м е т о д г р у п п и р о в к и (ф р. méthode des groupements) [6, p. 43]:

Метод группировки. *Пусть дана неограниченная сверху возрастающая последовательность натуральных чисел*

$$1 = n_0 < n_1 < n_2 < ... < n_p < ...$$

и неотрицательная последовательность вещественных чисел

$$u_1 \ge 0, u_2 \ge 0, u_3 \ge 0, ... , u_n \ge 0, ...$$

Образуем следующие суммы:

$$v_0 = u_{n_0}, \quad v_1 = u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + ... + u_{n_1}, \ ... \ , \quad v_k = u_{n_{k-1}+1} + u_{n_{k-1}+2} + ... + u_{n_k}, \ ...,$$

Тогда положительные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ *вместе сходятся к одной и той же сумме или вместе расходятся.*

Если члены положительного ряда (1) не возрастают, то для суммы из $n_{k+1} - n_k$ слагаемых справедливо двойное неравенство

$$(n_{k+1} - n_k)u_{n_k} \le u_{n_k+1} + u_{n_k+2} + ... + u_{n_{k+1}} = v_{n_k+1} \le (n_{k+1} - n_k)u_{n_{k+1}}\,.$$

или

$$\left(\frac{n_{k+1}}{n_k} - 1\right)n_k u_{n_k} \le u_{n_k+1} + u_{n_k+2} + ... + u_{n_{k+1}} = v_{n_k+1} \le \left(1 - \frac{n_k}{n_{k+1}}\right)n_{k+1}u_{n_{k+1}}\,. \tag{17}$$

Из условия Фабри (см. неравенство (16)), следует, что неравенство (17) для всех $k \ge k_0$ можно заменить на неравенство

$$\left(A-1\right)n_k u_{n_k} \le u_{n_k+1} + u_{n_k+2} + ... + u_{n_{k+1}} = v_{n_k+1} \le \left(1 - \frac{1}{B}\right)n_{k+1}u_{n_{k+1}}\,, \tag{18}$$

причём разности $A-1$ и $1-\dfrac{1}{B}$ в формуле (18) положительны. Тогда по признаку сравнения ряды (1) и (14) сходятся или расходятся одновременно. Тем самым признак сгущения Фабри в форме отношения нулевого порядка (слабый признак сгущения Фабри) доказан.

Замечание 3. Признак сгущения Фабри в форме отношения нулевого порядка можно представить в предельной форме (сам Фабри этого не заметил), заменив условие Фабри (16) на предел

$$\lim_{k\to\infty}\frac{n_{k+1}}{n_k} = q > 1\,. \tag{19}$$

Действительно, из существования предела (19) следует, что для произвольного вещественного числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное число k_0, что для всех натуральных чисел $k \ge k_0$ будет выполняться неравенство

$q-\varepsilon < n_{k+1}/n_k < q+\varepsilon$. Выбрав ε так, чтобы $q-\varepsilon > 1$ и положив $A = q-\varepsilon$ и $B = q+\varepsilon$, получим, что условие Фабри (16) выполняется.

Теперь несложно дать доказательство того, что положительный и невозрастающий ряд (1) и ряд Бромвича (6) вместе сходятся или вместе расходятся, тем самым доказав, что ряд Бореля (5) и ряд (1) так же вместе сходятся или вместе расходятся. Тем самым, мы получаем доказательство справедливости показательного признака Бореля – Бромвича, приведённого выше в пункте 2.

Пусть $a > 1$ и пусть $n_k = \left[a^k\right]$. В пункте 2 было показано, что для любого $a > 1$ найдётся такое натуральное число k_0, что для всех $k \ge k_0$ последовательность $n_k = \left[a^k\right]$ будет возрастающей, то есть $n_{k+1} > n_k$ и неограниченной сверху. Для таки значений k имеем

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} = \frac{\left[a^{k+1}\right]}{\left[a^k\right]} = \frac{a^{k+1} - \left\{a^{k+1}\right\}}{a^k - \left\{a^k\right\}} \le \frac{a^{k+1}}{a^k - 1}, \quad \frac{n_{k+1}}{n_k} = \frac{\left[a^{k+1}\right]}{\left[a^k\right]} = \frac{a^{k+1} - \left\{a^{k+1}\right\}}{a^k - \left\{a^k\right\}} \ge \frac{a^{k+1} - 1}{a^k},$$

или

$$a - \frac{1}{a^k} \le \frac{n_{k+1}}{n_k} \le a + \frac{a}{a^k - 1}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу получим, $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = a > 1$. Тем самым, признак сгущения Бореля – Бромвича доказан.

Пример. Доказать расходимость ряда Абеля $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. Воспользуемся рядом Бромвича (6) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left[e^k\right] \frac{1}{\left[e^k\right] \ln \left[e^k\right]} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln \left[e^k\right]}$. Так $\left[e^k\right] \le e^k$, то $\frac{1}{\ln \left[e^k\right]} \ge \frac{1}{\ln e^k} = \frac{1}{k}$. Но ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ - расходящийся, поэтому ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ так же расходится.

4. Показательный признак сгущения Кноппа. Наконец, в 1922 году немецкий математик Кнопп привёл ещё один вариант расширения признака сгущения Коши [8, s. 116]:

«**Теорема.** *Если* $\sum a_n$ *опять является рядом, чьи члены образуют положительную монотонно убывающую последовательность* (a_n), *и если* $(g_0, g_1, ...)$ *есть произвольная монотонно возрастающая последовательность целых чисел, то, два ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{и} \ \sum_{k=0}^{\infty} (g_{k+1} - g_k) a_{g_k}$$

оба вместе сходятся или оба вместе расходятся, при условии, что g_k *для каждого k удовлетворяют условиям*

$$g_k > g_{k-1} \geq 0 \ \text{и} \ g_{k+1} - g_k \leq M\left(g_k - g_{k-1}\right)$$

во втором из которых стоит M в качестве положительной константы».

В примечаниях он утверждал

«Примечание.

79. 1. *Конечно, достаточно, чтобы условия в обоих высказываниях теоремы выполнялись бы в ряде, начиная с некоторого места. Тогда мы можем, в расширенной теореме, в частном случае положить*

$$g_k = 3^k, \ = 4^k, \ \ldots, \quad \text{или} \quad = [g^k],$$

где вещественное число $g > 1$ *и* $[g^k]$ *наибольшее целое число, не превышающее* g^k ».

Кнопп, естественно, считал, что легко доказать, что неотрицательная подпоследовательность $g_k = \left[g^k \right]$, $g > 1$, начиная с некоторого k_0 для всех $k \geq k_0$, монотонно возрастает, неограниченна с верху и удовлетворяет условию Кноппа $g_{k+1} - g_k \leq M\left(g_k - g_{k-1}\right)$. Тем не менее, доказательство Кнопп не привёл.

Отметим, что монотонность и неограниченность последовательности $g_k = \left[g^k \right]$, $g > 1$ была нами доказана в пункте 3, при этом нужно заменить число a на число g. В пункте 4 было установлено, что для последовательности $g_k = \left[g^k \right]$, $g > 1$ справедливо равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{g_{k+1}}{g_k} = g > 1$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{g_{k+1} - g_k}{g_k - g_{k-1}} = 1$. Теперь уже очевидно, что условие Кноппа $g_{k+1} - g_k \le M\left(g_k - g_{k-1}\right)$ будет выполняться для всех $k \ge k_0$. Следовательно, ряд (1) и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\left[g^{k+1}\right] - \left[g^k\right]\right) a_{\left[g^k\right]}$ будут вместе сходиться или вместе расходиться. Отсюда уже нетрудно вывести признак Бореля – Бромвича, повторив доказательство признака Фабри.

Заключение. Впервые дано доказательство показательных признаков сгущения Бореля и Бромвича. Показано, что это два равносильных признака, которые можно объединить в один признак сгущения Бореля – Бромвича. Одно из доказательств основано на признаке сгущения Фабри в форме отношения нулевого порядка. Другое - на признаке сгущения Кноппа. Целью дальнейших наших усилий станет доказательство общего показательного признака сгущения из признака сгущения Бореля – Бромвича.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cauchy A.L. Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. I.re partie: Analyse algébrique. – Paris: Impr. royale Debure frères, 1821. – XVI+576 p.

2. Bertrand J. Traité de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral. Premiére Partie. Calcul Différentiel. – Paris: Gauthier-Villars, 1864. – VII+XLIV+780 p.

3. Терещенко И.В. Признаки сгущения III. Общий показательный признак сгущения. Доказательство, основанное на интегральном признаке сходимости Маклорена - Коши. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2014. № 5. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/232.

4. Borel E. Leçons sur les Séries a Termes Positifs. – Paris: Gauthier-Villars, 1902. – VI+93 p.

5. Bromwich T.J.I. An Introduction to the Theory of Infinite Series. – London: Macmillan and Co., Limited, 1908. – VIII+511 p.

6. Fabry E. Théorie des séries a termes constants applications aux calculs numériques. – Paris: Hermann, 1910. – 198 p.

7. Терещенко И.В. О новом признаке сгущения в форме отношения первого порядка / Сб. науч. статей V Межд. научно-прак. конф. «Научные чтения имени проф. Н.Е. Жуковского», Краснодар, 17-18 декабря 2014 г. – Краснодар: Изд. ООО Издательский Дом – ЮГ, 2015. – сс. 286-289.

8. Knopp K. Theorie und anwendung der unendlichen reihen. Berlin, Springer, 1922. 474 s.

REFERENCES

1. Cauchy A.L. Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. I.re partie: Analyse algébrique. – Paris: Impr. royale Debure frères, 1821. – XVI+576 p.

2. Bertrand J. Traité de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral. Premiére Partie. Calcul Différentiel. – Paris: Gauthier-Villars, 1864. – VII+XLIV+780 p.

3. Tereshchenko I.V. Priznaki sgushcheniya III. Obshchiy pokazatelnyy priznak sgushcheniya. Dokazatelstvo, osnovannoe na integralnom priznake skhodimosti Maklorena - Koshi. [Elektronnyy resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: elektron. setevoy politematich. zhurn. 2014. № 5. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/232.

4. Borel E. Leçons sur les Séries a Termes Positifs. – Paris: Gauthier-Villars, 1902. – VI+93 p.

5. Bromwich T.J.I. An Introduction to the Theory of Infinite Series. – London: Macmillan and Co., Limited, 1908. – VIII+511 p.

6. Fabry E. Théorie des séries a termes constants applications aux calculs numériques. – Paris: Hermann, 1910. – 198 p.

7. Tereshchenko I.V. O novom priznake sgushcheniya v forme otnosheniya pervogo poryadka / Sb. nauch. statey V Mezhd. nauchno-prak. konf. «Nauchnye

chteniya imeni prof. N.E. Zhukovskogo», Krasnodar, 17-18 dekabrya 2014 g. – Krasnodar: Izd. OOO Izdatelskiy Dom – YuG, 2015. – ss. 286-289.

8. Knopp K. Theorie und anwendung der unendlichen reihen. Berlin, Springer, 1922. 474 s.

ABOUT THE EXPONENTIAL CONDENSATIONS TESTS OF BOREL AND BROMWICH AND ON THEIR CONNECTION WITH CONDENSATION TESTS OF FABRY AND KNOPP

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

Two rare exponential condensation tests of Borel and Bromwich are considered for the convergence of the infinite series with a positive monotone decreasing terms. For the first time their equivalence is proved and the proof these tests of the convergence are given. The formulation of the test for the convergence is given, combining both of these tests in the exponential condensation test of Borel and Bromwich. The proof of the above tests is based on the Fabry's condensation test in the form of zero-order ratio. The second version of the proof uses the Knopp's condensation test. The theory under consideration allows us to hope to prove in the same way general exponential condensation test, which is used to determine the convergence of the positive series with monotonically decreasing terms.
Key words: infinite series, positive infinite series, infinite series with the decreasing terms, condensation test, J. Bertrand, E. Borel, T. Bromwich, K. Knopp, A. Cauchy, E. Fabry.